

# Décohérence : du quantique au classique

G. Butseraen, C. De Marez et G. Uhlrich-Meunier

3 mai 2016

Ce rapport a été rédigé dans le cadre du cours de Physique, Information et Calcul, de la licence Sciences de la Matière de l'ENS de Lyon, dispensé par Pascal Degiovanni et Natacha Portier.

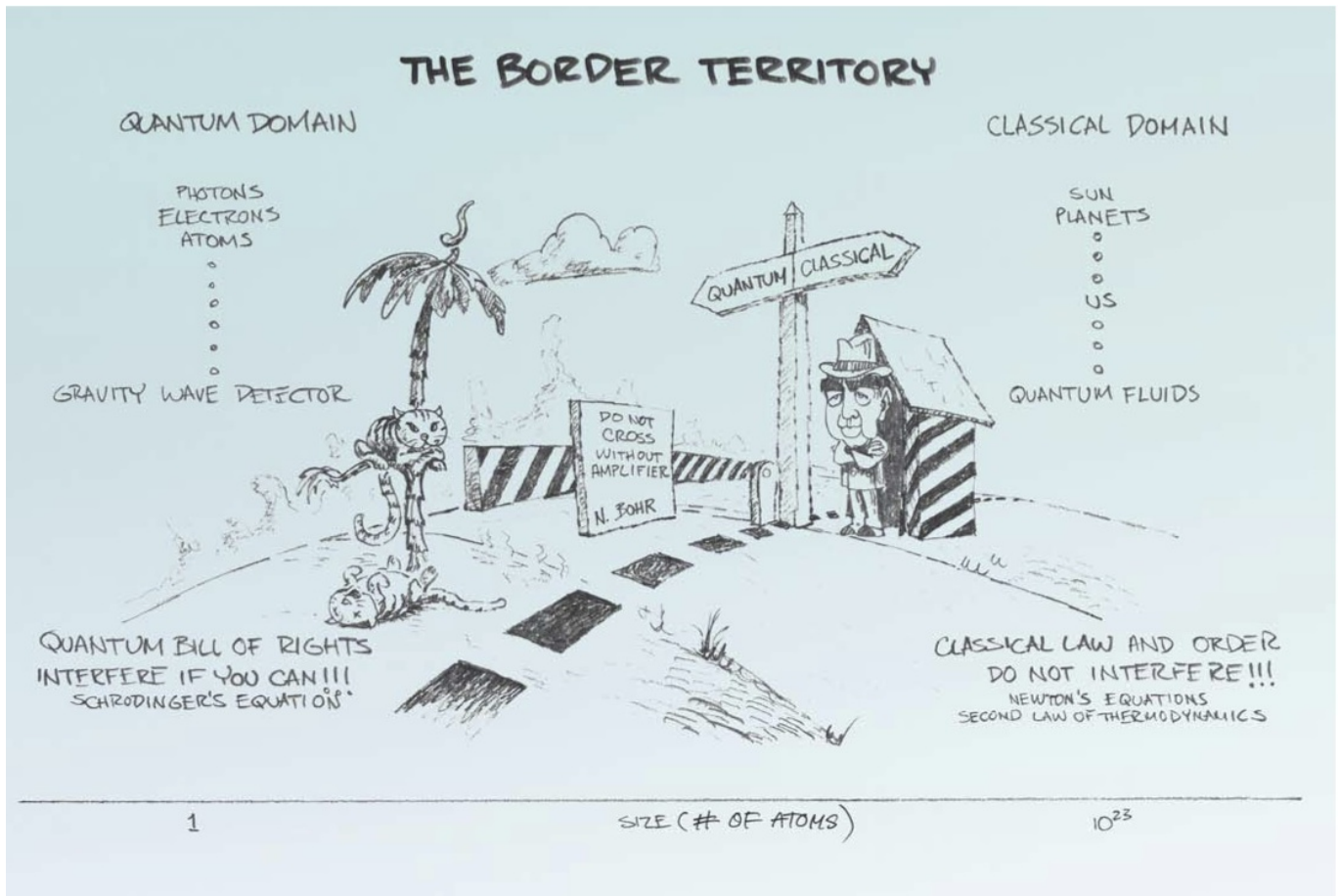


FIGURE 1: La mécanique quantique vue par l'interprétation de Copenhague selon Zurek [1]

# Table des matières

<b>0</b>	<b>Introduction : pourquoi la décohérence ?</b>	<b>1</b>
0.1	Le problème de la base privilégiée . . . . .	2
0.2	Le problème de la non-observation d'interférences . . . . .	2
0.3	Le problème de l'unicité de la mesure . . . . .	3
<b>1</b>	<b>La théorie de la décohérence</b>	<b>3</b>
1.1	Le principe de superposition . . . . .	3
1.2	L'intrication quantique . . . . .	3
1.3	L'interaction avec l'environnement et le schéma de Von Neumann . . . . .	4
1.4	Les matrices densité . . . . .	4
1.4.1	La matrice densité pure . . . . .	4
1.4.2	La matrice densité mixte . . . . .	4
1.4.3	La matrice densité réduite . . . . .	5
<b>2</b>	<b>La décohérence résoud-elle nos problèmes ?</b>	<b>5</b>
2.1	Le problème de la base privilégiée . . . . .	5
2.2	Les Etats pointeurs . . . . .	6
2.3	Le problème de la non-observation d'interférences . . . . .	7
2.4	Le problème d'unicité de la mesure . . . . .	8
<b>3</b>	<b>Deux exemples pour illustrer la décohérence</b>	<b>8</b>
3.1	Modèle simple d'un système à deux niveaux couplé avec un environnement composé de N systèmes à deux niveaux . . . . .	9
3.2	Interférométrie de molécules $C_{70}$ . . . . .	10
<b>4</b>	<b>Conclusion</b>	<b>12</b>

## 0 Introduction : pourquoi la décohérence ?

En mécanique classique, lorsque nous effectuons une expérience, nous avons tendance à nous placer dans le cadre de systèmes isolés, car il est plus simple de mettre en évidence les paramètres que nous voulons étudier. C'est pour cela que la mécanique quantique fut inventée dans ce cadre précis. Les prédictions se révélèrent très bonnes avec une précision impressionnante, comme par exemple pour le spectre de l'atome d'hydrogène. Au début de la mécanique quantique les systèmes étaient conçus comme étant isolés de l'environnement car contrôlés au sein du laboratoire, et nous pouvions donc les considérer comme isolés pour faire des calculs.

Cependant notre observation du monde de tous les jours nous montrent que les phénomènes quantiques ne se produisent pas à l'échelle macroscopique. D'après la théorie, en liant un système microscopique à un système macroscopique, on devrait pouvoir observer de tels phénomènes. L'exemple le plus frappant est le chat de Schrödinger : Une boîte contient un atome à 2 niveaux, un marteau, une fiole de poison et un chat. L'atome est initialement dans l'état  $|\uparrow\rangle$  et s'il passe dans l'état  $|\downarrow\rangle$  cela déclenche le marteau qui casse la fiole et tue le chat. L'atome se situe ainsi dans une superposition d'état  $|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle$ , et si on considère le chat comme *dépendant* de l'état de l'atome, on a l'état :  $|\uparrow \text{ vivant}\rangle + |\uparrow \text{ mort}\rangle$ . D'après l'interprétation de Copenhague, l'observateur détruit la superposition lors de l'observation, mais la question est : dans quel état est le système avant la mesure ? Il faut aussi noter que Schrödinger considère le système isolé du reste de l'univers, ce qui n'est pas possible expérimentalement.

Le point est que le système n'est jamais isolé, mais en interaction avec l'environnement. C'est ce phénomène que formalise la théorie de la décohérence, et qui permet d'expliquer de nombreux phénomènes. Nous allons voir dans la suite que cela se traduit par une intrication du système avec l'environnement. Ainsi, lors des interactions, de la cohérence (qui quantifie à quel point le système est quantique) est transférée à l'environnement à travers l'intrication. Or comme nous ne pouvons pas mesurer tout l'environnement, plus il y a d'interaction, plus le système perd son caractère quantique. Ce processus est irréversible. On voit alors qu'en mesurant le système et tout l'environnement on devrait voir réapparaître les phénomènes quantiques.

Dans la théorie de la mécanique quantique, en particulier dans les expériences où l'on vient interagir avec le système, il existe trois problèmes, que nous allons présenter ici avec des exemples simples, et auxquels nous apporterons des éléments de réponses dans la partie 2.

Dans ce rapport, nous allons présenter le formalisme de base de la décohérence quantique. Pour ce rapport, nous avons été largement inspiré par le livre *Decoherence and the quantum-to-classical transition* [2] de M. Schlosshauer, et par l'article *Decoherence and the transition from quantum to classical*[1] de H. Zurek.

## 0.1 Le problème de la base privilégiée

Classiquement, lorsque l'on souhaite observer un phénomène physique, on mesure ce dernier à l'aide d'un appareil de mesure classique. Par exemple si l'on considère une barre verticale en équilibre sur une table, on peut utiliser l'outil de mesure qui nous est le plus naturel (nos yeux) pour affirmer que la barre est toujours en équilibre ou non et il n'y a alors aucune ambiguïté.

Le problème vient si l'on souhaite observer un phénomène quantique. En effet dans le schéma de Von Neumann (explicité dans la partie 1) on affirme que lors de la mesure, le système s'intrique avec l'appareil de mesure (l'environnement). Ici le problème résulte de cette intrication. En effet, on a une ambiguïté de la base de mesure, puisque plusieurs bases sont équivalentes, et satisfont aux mêmes lois physiques. Le développement plus précis sera fait dans la partie 2, lorsque nous présenterons la réponse de la décohérence à ce problème.

## 0.2 Le problème de la non-observation d'interférences

Ce problème peut se résumer comme suit : comment passer d'une superposition quantique, à une superposition classique autrement appelé mélange statistique. En effet, on considère le cas du chat de Schrodinger cité plus haut. On exprime le vecteur d'état initial, avec superposition quantique comme  $|\text{Chat}\rangle = \alpha |\text{Mort}\rangle + \beta |\text{Vivant}\rangle$  où  $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$  et  $\alpha$  et  $\beta$  des complexes.

Les amplitudes de probabilités du chat mort et du chat vivant sont respectivement  $A_{\text{mort}} = \alpha$  et  $A_{\text{vivant}} = \beta$ . L'état étant initialement dans une superposition d'état, la probabilité finale est donnée par :  $P_{\text{chat}} = |A_{\text{vivant}} + A_{\text{mort}}|^2 = |\alpha|^2 + |\beta|^2 + I(\alpha, \beta)$ . Ici,  $I(\alpha, \beta)$  est un terme d'interférence qui vient rendre compte du caractère quantique du système. En effet, pour le cas d'un système quantique dans une superposition d'état, il y aura ce terme d'interférence. Dans le cas du chat, cette probabilité est difficile à interpréter classiquement. Elle est plus parlante avec l'expérience des fentes d'Young dans laquelle on exprime la probabilité de trouver le photon sur l'écran, et où dans ce cas le terme d'interférence est visible sur l'écran.

En revanche, le point est que si le terme d'interférence n'est pas présent, on a affaire à un mélange statistique simplement donné par  $P_{\text{chat}} = |A_{\text{vivant}}|^2 + |A_{\text{mort}}|^2$ . La résolution du problème de la non observation d'interférences est donc de décrire pourquoi un système quantique passe-t-il d'une superposition quantique, dans lequel le système est *tout à la fois*, à un mélange statistique déterministe.

### 0.3 Le problème de l'unicité de la mesure

On a vu dans le paragraphe précédent que si l'on explique le phénomène de la disparition d'interférences on se retrouve avant l'ouverture de la boîte dans le cas d'un mélange statistique où le chat a une probabilité  $|\alpha|^2$  d'être mort et  $|\beta|^2$  d'être vivant. Si l'on considère le cas équiprobable, on a à l'ouverture de la boîte une chance sur deux de trouver le chat mort. Le problème des sorties consiste à expliquer pourquoi le système a choisi un état plutôt qu'un autre. Nous verrons dans la suite que la décohérence ne répond pas à ce problème, et que cela mène à différentes interprétations philosophiques et physiques.

Ces problèmes étant posés, nous allons dans un premier temps présenter les outils théoriques nécessaires à la compréhension de la théorie de la décohérence, puis discuter de la résolution des 3 problèmes et enfin d'un exemple plus concret.

## 1 La théorie de la décohérence

Dans cette partie, nous allons expliciter les différents outils théoriques auxquels nous aurons recours afin d'expliquer les bases de la théorie de la décohérence.

### 1.1 Le principe de superposition

Si l'on parle en terme de fonctions d'ondes, le **Principe de superposition** peut être formulé comme suit : *Toute combinaison linéaire de fonctions d'onde est également une fonction d'onde possible* [3]. Ce principe nous permet d'écrire un vecteur d'état comme une composition d'autres vecteurs d'états, comme par exemple  $|\text{Chat}\rangle = \alpha |\text{Mort}\rangle + \beta |\text{Vivant}\rangle$ . Ce principe est crucial en mécanique quantique, et de ce principe découle des implications philosophiques très importantes.

En effet, dans l'interprétation de Copenhague il est dit que le principe de superposition ne s'applique qu'aux systèmes microscopiques (*Heisenberg cut* : "le macroscopique est décrit par le classique, le microscopique par le quantique"). Cependant certaines expériences modernes montrent que la superposition reste valable pour des systèmes plus gros, et à priori il n'y a pas de limite de taille. L'apparente *disparition* de la superposition des systèmes macroscopiques est un des points qu'essaye donc d'expliquer la théorie de la décohérence, notamment à travers la résolution du problème discuté dans le paragraphe 0.2.

### 1.2 L'intrication quantique

Le phénomène d'intrication est fondamental pour comprendre la décohérence.

**Définition** Soit un système  $S$  composé de deux systèmes  $S_1$  et  $S_2$ , d'espace des états respectifs  $\mathcal{H}_1$  et  $\mathcal{H}_2$ , tel que  $S = S_1 \cup S_2$  et  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ . S'il n'existe pas de vecteurs d'état  $|\Phi_1\rangle$  appartenant à  $\mathcal{H}_1$  et  $|\Phi_2\rangle$  appartenant à  $\mathcal{H}_2$  tels que l'état  $|\Psi\rangle$  du système  $S$  puisse s'écrire  $|\Phi_1\rangle \otimes |\Phi_2\rangle$  alors c'est un état intriqué. Cela veut dire que nous ne pouvons plus les regarder comme des entités individuelles. [2]

*Différences entre corrélations classiques et quantiques à travers un exemple :*

- Classique : nous avons deux boîtes identiques et deux balles, l'une est rouge, l'autre bleu. Quelqu'un place chaque balle dans une boîte. Si nous ouvrons la première boîte et que nous voyons la balle rouge dedans alors nous savons d'office que la balle bleu se trouve dans la seconde boîte.
- Quantique : Nous préparons l'état intriqué :  $|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\text{bleu}\rangle_1 |\text{rouge}\rangle_2 + |\text{rouge}\rangle_1 |\text{bleu}\rangle_2)$  ou les indices numérotent les boîtes. Alors si on ouvre la première boîte et que l'on voit la balle rouge  $|\text{rouge}\rangle_1$  alors on sait d'office que la bleu  $|\text{bleu}\rangle_2$  et dans la deuxième : le résultat est le même qu'en classique, la corrélation quantique s'est transformée en corrélation classique, mais toute la différence se fait avant la mesure. En effet, dans le cas classique on avait soit l'état  $|\text{bleu}\rangle_1 |\text{rouge}\rangle_2$  soit l'état  $|\text{rouge}\rangle_1 |\text{bleu}\rangle_2$ . L'état était prédéfini avant la mesure, il existait déjà. Dans le cas quantique il était totalement indéterminé (superposition).

### 1.3 L'interaction avec l'environnement et le schéma de Von Neumann

Nous avons vu en introduction, que la pierre angulaire de la décohérence est l'interaction du système avec l'environnement. L'objectif de Von Neumann était de traiter aussi bien le système que l'appareil de mesure quantiquement (diffère totalement de l'interprétation de Copenhague qui invoque un appareil classique). Ainsi, on ne considère plus le système comme isolé, mais comme couplé avec l'environnement. Dans ce cas le hamiltonien du système complet est  $\hat{H} = \hat{H}_S + \hat{H}_E + \hat{H}_{SE}$ . Dans notre étude, nous nous sommes attaché à décrire le phénomène de mesure, où l'interaction est forte, et avons donc négligé les deux premiers termes. Nous nous attacherons donc à étudier des systèmes décrits par  $\hat{H}_{SE}$ . Ce hamiltonien représente l'interaction du système avec l'environnement, et il s'exprime comme :

$$\hat{H}_{SE} = \hat{S} \otimes \hat{E} \quad (1)$$

Les deux termes de droite représentent les observables rentrant en jeu lors de la mesure, le premier décrit le système et le deuxième l'environnement. Leur expressions dépend du système étudié, et nous présenterons donc dans chaque cas desquels il s'agit. Ici, (1) ne représente pas la forme la plus générale de ce type de Hamiltonien, mais nous nous limiterons à ce cas.

Imaginons que le système S est dans l'état initial  $|s_i\rangle$  et l'appareil de mesure (ou environnement) dans l'état  $|e_r\rangle$  (ready). Le schéma de Von Neumann consiste à dire qu'après mesure :  $|s_i\rangle |e_r\rangle \rightarrow |s_i\rangle |e_i\rangle$ . Pour l'instant, il n'y a pas encore d'intrication, puisqu'on a pu écrire l'état total comme un produit tensoriel des états des deux systèmes.

Maintenant, si le système est dans une superposition d'états, la linéarité de l'équation de Schrodinger fait qu'après mesure :

$$\sum_i (c_i |s_i\rangle) |e_r\rangle \rightarrow \sum_i (c_i |s_i\rangle |e_i\rangle), \text{ avec } c_i \text{ coefficients complexe.}$$

Après mesure d'un état, on peut donc voir que le système est intriqué avec l'appareil de mesure

### 1.4 Les matrices densité

Lorsque l'on fait des calculs de mécanique quantique, on considère la plupart du temps le vecteur d'état  $|\Psi\rangle$  ou encore la fonction d'onde  $\Psi(x, t)$ . Dans notre cas, du fait de l'intrication du système étudié et de l'environnement, il n'y a pas d'états associés aux sous-système que l'on veut observer. La question est donc de savoir si un outil nous permettra d'encoder tous les résultats de mesures locales associés à seulement un sous système voulu. Cet outil est l'opérateur densité.

#### 1.4.1 La matrice densité pure

La matrice densité pure est une façon de décrire le système totalement équivalente au vecteur d'état, il s'exprime par :

$$\rho_{\text{pure}} = |\Psi\rangle \langle\Psi|$$

Les termes diagonaux représentent les corrélations classiques et les termes non diagonaux les corrélations quantiques, termes d'interférence ou encore cohérence. Soit U un opérateur, alors  $\langle U \rangle = \text{Tr}(\rho U)$ . Attention, le fait que la matrice soit diagonale ne veut pas dire que le système n'a pas de propriétés quantiques,  $\rho$  est diagonalisable donc les termes quantiques dépendent de la base.

#### 1.4.2 La matrice densité mixte

La matrice densité permet aussi de décrire un mélange statistique d'états purs. Nous avons préparé un état mais sans savoir lequel, c'est une indétermination classique. C'est comme pour un gaz en physique statistique, a priori nous pourrions effectuer les mesures sur toutes les particules du système. En pratique on ne le fait pas et on introduit alors des probabilités.

$$\rho_{\text{mixte}} = \sum_i p_i |\Psi_i\rangle \langle \Psi_i|$$

On voit que la matrice est diagonale donc à priori ne présente pas de corrélation quantique. Pour voir si on a affaire à une matrice pure ou une matrice mixte, il suffit de voir si on vérifie  $\rho_{\text{mixte}}^2 = \rho_{\text{mixte}}$  car la matrice pure est un projecteur. On ne peut interpréter la matrice mixte comme une distribution de probabilité classique seulement si on sait avec exactitude quels états  $|\Psi_i\rangle$  ont possiblement été préparé. En effet si on a aucune information sur la préparation mais juste accès à cette matrice on ne peut pas dire que le système est dans un des états  $|\Psi_i\rangle$ . Effectivement si on reprend l'exemple des spins du paragraphe 0.1, on voit que  $\rho = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow_z\rangle \langle \uparrow_z| + |\downarrow_z\rangle \langle \downarrow_z|) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow_x\rangle \langle \uparrow_x| + |\downarrow_x\rangle \langle \downarrow_x|)$  donc on a accès à la probabilité de différents ensembles de vecteur d'états pure (soit  $\{|\uparrow_z\rangle, |\downarrow_z\rangle\}$  soit  $\{|\uparrow_x\rangle, |\downarrow_x\rangle\}$ ) mais on ne sait pas quel état physique a été préparé.

### 1.4.3 La matrice densité réduite

La matrice de densité réduite permet de décrire un système SE intriqué dans lequel on ne pourrait qu'effectuer des mesures sur S. On est bien dans ce cas, puisque lors de la mesure d'une observable, nous ne connaissons pas les états de l'environnement, et donc de l'appareil de mesure. Pour cela on invoque d'abord la matrice pure  $\rho_{SE}$  puis on fait la trace partielle sur E :

$$\rho_S = \text{Tr}_E(\rho_{SE})$$

Physiquement, cela revient à moyennner sur tous les degrés de liberté de E puisqu'on n'y a pas accès. Cet outil est très important pour la décohérence puisque nous l'avons vu plus haut, les interactions avec l'environnement entraîne l'intrication de celui-ci avec notre système. Or l'environnement est bien trop complexe pour avoir accès à tous ses degrés de liberté, nous sommes donc contraint d'utiliser la matrice densité réduite.

## 2 La décohérence résoud-elle nos problèmes ?

Nous allons dans cette partie voir comment la théorie de la décohérence répond (ou non) aux trois problèmes cités en introduction.

### 2.1 Le problème de la base privilégiée

Nous allons expliquer le problème à travers un exemple. Dans cet exemple, nous nous plaçons dans le schéma de Von Neumann. Ici nous partons d'une interaction du spin selon l'axe z d'une particule avec un détecteur macroscopique. Le choix de l'exemple du spin est délibéré puisqu'il permet facilement de montrer l'incohérence du changement de base. On a alors le hamiltonien d'interaction suivant :

$$\hat{H}_{SE} = \hat{\sigma}_z \otimes \hat{D}$$

Dans ce cadre, imaginons que l'on veuille mesurer le spin d'une particule en partant d'une superposition d'état on a alors l'état final  $|\Psi\rangle$  défini comme :

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow_z\rangle_S |\uparrow_z\rangle_D + |\downarrow_z\rangle_S |\downarrow_z\rangle_D).$$

Or, si l'on projette cet état sur la base spins orientés selon x, on obtient :

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow_x\rangle_S |\uparrow_x\rangle_D + |\downarrow_x\rangle_S |\downarrow_x\rangle_D).$$

Ceci contredit les règles de la mécanique quantique puisqu'on pourrait penser mesurer le spin selon  $z$  et selon  $x$  de manière équivalente. Or les deux opérateurs  $\hat{\sigma}_z$  et  $\hat{\sigma}_x$  ne commutent pas. Nous avons donc un problème pour 'choisir' la base que l'on peut utiliser. Cependant, ces deux bases ne sont pas équivalentes. En effet, dans l'expression du hamiltonien d'interaction, c'est  $\hat{\sigma}_z$  qui entre en jeu, et non  $\hat{\sigma}_x$ . Et c'est précisément ça qui rend la base  $z$  privilégiée par rapport aux autres. C'est donc dans cette base 'privilégiée' qu'il faut étudier le système en décohérence, ce que nous allons faire maintenant en introduisant le terme d'états pointeurs.

## 2.2 Les Etats pointeurs

On se replace dans le même cas que précédemment, à savoir le schéma de Von Neumann et le hamiltonien d'interaction suivant :

$$\hat{H}_{SE} = \hat{S} \otimes \hat{E}$$

Cette fois ci on considère l'environnement en général et non simplement un détecteur,  $S$  désigne notre système, quelconque ici. Nous allons ici démontrer un fait valable pour toutes les observables.

On considère l'état de départ à  $t=0$  :  $|\psi_{SE}(0)\rangle = |s_i\rangle \otimes |E_0\rangle$ . Ici,  $|s_i\rangle$  correspond à un état propre de l'opérateur  $\hat{S}$ . Si on applique le hamiltonien d'interaction à notre état pour voir son évolution temporelle, on a alors :

$$\begin{aligned} \hat{H}_{SE} |\psi_{SE}(0)\rangle &= |\psi_{SE}(t)\rangle = (\hat{S} \otimes \hat{E})(|s_i\rangle \otimes |E_0\rangle) \\ &= |s_i\rangle \otimes e^{-\frac{i}{\hbar}s_i\hat{E}t} |E_0\rangle \\ &= |s_i\rangle \otimes |E_i\rangle \end{aligned}$$

$s_i$  valeur propre associée au vecteur propre  $|s_i\rangle$ .  $|E_i\rangle$  est donc l'état de l'environnement qui a mesuré l'état  $|s_i\rangle$  du système. On s'est ici placé dans la base privilégiée, et on voit que l'état  $|s_i\rangle$  reste inchangé malgré l'action du hamiltonien d'interaction. On a vu précédemment que la décohérence (donc la disparition des superpositions au niveau macroscopique) était à priori due à l'interaction de certains états avec l'environnement. Ici, les vecteurs propres restent inchangés après l'application du hamiltonien d'interaction, donc ils n'interagissent pas avec l'environnement. On peut essayer de prendre comme état de départ une superposition d'états propres, donc un vecteur quelconque. Nous allons illustrer cela avec une superposition de deux états propres mais on peut trivialement le généraliser à une somme de  $N$  états propres (état donc complètement quelconque). On part cette fois de l'état :  $|\psi_{SE}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|s_i\rangle + |s_j\rangle)$ .

$$\begin{aligned} \hat{H}_{SE} |\psi_{SE}(0)\rangle &= |\psi_{SE}(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{S} \otimes \hat{E})(|s_i\rangle + |s_j\rangle) \otimes |E_0\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|s_i\rangle \otimes e^{-\frac{i}{\hbar}s_i\hat{E}t} |E_0\rangle + |s_j\rangle \otimes e^{-\frac{i}{\hbar}s_j\hat{E}t} |E_0\rangle) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|s_i\rangle \otimes |E_i\rangle + |s_j\rangle \otimes |E_j\rangle) \end{aligned}$$

On peut facilement généraliser cela à un état quelconque en prenant :

$$\begin{aligned} |\psi_{SE}(0)\rangle &= \sum_j^N \alpha_{ij} |s_j\rangle \\ |\psi_{SE}(t)\rangle &= \sum_j^N \alpha_{ij} |s_j\rangle \otimes |E_j\rangle \end{aligned}$$

Bien sûr, on ne peut pas factoriser un tel état sous la forme  $|\psi_{SE}(t)\rangle \otimes (\dots)$ , c'est donc un état intriqué.

On peut interpréter cette intrication comme une fuite d'information du système vers l'environnement. C'est cette fuite qui entraîne la décohérence.

Pour conclure sur ce phénomène, il est important de noter la différence fondamentale entre l'interaction d'un état propre de l'opérateur considéré avec l'environnement et l'interaction d'un état quelconque avec l'environnement. Les états propres restent les mêmes, mais les superpositions s'intriquent avec l'environnement (de plus en plus avec le temps). Ces intrications entraînent la fuite d'informations vers l'environnement : c'est la décohérence. Ce phénomène n'affecte donc pas les états propres. Maintenant, dernier point crucial lui aussi. Les opérateurs que l'on peut 'mesurer', à savoir les observables, ont des valeurs propres réelles mais surtout ont des états propres que l'on observe macroscopiquement. Autrement dit, les états propres des observables sont les états que l'on observe après décohérence, et c'est parfaitement consistant avec notre raisonnement puisque l'on a vu que c'était les états propres qui subsistaient après décohérence. On appelle ces états 'pointeurs', nous en aurons besoin dans la suite.

### 2.3 Le problème de la non-observation d'interférences

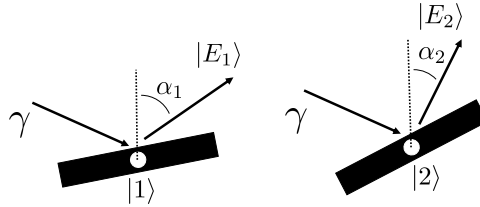


FIGURE 2: Schéma illustrant la situation.

Nous allons illustrer par un exemple le problème de la non-observation d'interférences, à savoir pourquoi nous n'observons pas d'interférence macroscopiquement, avec des objets de tous les jours. Ici on considère le système suivant : un livre avec une certaine orientation dans l'espace, qui représente notre système, est frappé en permanence par des photons. En fonction de l'orientation du livre, les photons ne vont pas se réfléchir dans la même direction, et selon le schéma de Von Neumann encore, on va avoir intrication entre le photon et le livre. Les états  $|1\rangle$  et  $|2\rangle$  correspondent à deux orientations différentes du livre, les états  $|E_1\rangle$  et  $|E_2\rangle$  correspondent aux états de l'environnement associés (typiquement la direction des photons). On a alors après collision photon - livre :  $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle |E_1\rangle + |2\rangle |E_2\rangle)$

Bien sûr ici on se place dans l'espace de Hilbert généré par les deux états possibles de notre livre  $|1\rangle$  et  $|2\rangle$ . On suppose donc se trouver dans un système à deux niveaux.

On calcule maintenant la matrice densité pure :

$$\rho = |\psi\rangle \langle\psi| = \frac{1}{2}(|1\rangle |E_1\rangle \langle 1| \langle E_1| + |1\rangle |E_1\rangle \langle 2| \langle E_2| + |2\rangle |E_2\rangle \langle 1| \langle E_1| + |2\rangle |E_2\rangle \langle 2| \langle E_2|) \quad (2)$$

En pratique, nous n'avons pas accès à l'information sur l'environnement, tout ce que l'on peut mesurer est l'orientation du livre. L'astuce est donc de moyenner sur l'ensemble des degrés de liberté de l'environnement pour coller au fait que nous n'avons pas l'information sur l'environnement. Pour ça, on calcule la trace partielle de  $\rho$  par rapport à l'environnement.  $\rho_L = Tr_E(\rho) = \langle x|\rho|x\rangle + \langle y|\rho|y\rangle$  avec  $\{|x\rangle, |y\rangle\}$  base orthonormée de l'espace de l'environnement. On a dans cette base :

$$|E_1\rangle = \alpha |x\rangle + \beta |y\rangle, |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \text{ et}$$

$$|E_2\rangle = \gamma |x\rangle + \delta |y\rangle, |\gamma|^2 + |\delta|^2 = 1$$

Finalement, on obtient :



$$\rho_L = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \langle E_1|E_2 \rangle \\ \langle E_2|E_1 \rangle & 1 \end{pmatrix}$$

On a deux parties à cette matrice : la partie diagonale, que l'on a classiquement, et des termes non-diagonaux qui correspondent aux interférences entre les deux états que l'on observe macroscopiquement modulé par le produit scalaire  $\langle E_2|E_1 \rangle$ . Que devient ce produit scalaire quand le temps augmente ? Il temps exponentiellement vers 0 suivant une loi de la forme  $e^{-\frac{t}{\tau_d}}$ , avec  $\tau_d$  le temps de décohérence. Ce temps dépend bien sûr du système considéré, mais aussi bien sûr de  $|E_1\rangle$  et  $|E_2\rangle$ . Plus ces états sont proches, plus le temps de décohérence sera long (produit scalaire tend plus lentement vers 0). A notre échelle de temps, ces  $\tau_d$  sont complètement négligeables et les matrices densité réduites sont diagonales extrêmement vite, voilà pourquoi nous n'observons pas d'interférence pour des systèmes macroscopiques. Nous verrons dans la partie suivante des exemples de tels temps de décohérence.

## 2.4 Le problème d'unicité de la mesure

Nous avons vu comment l'environnement, en tant qu'observateur géant, sélectionnait des états en permanence. Aucun objet macroscopique que l'on peut observer n'est sujet à interférence. C'est à cause du caractère diagonal de la matrice densité réduite après décohérence. Cette matrice est alors exactement de la même forme qu'une matrice densité mixte où l'on aurait un mélange statistique classique. Prenons l'exemple le plus célèbre de la mécanique quantique : le chat de Shrödinger. Nous avons vu avec le schéma de Von Neumann, qu'une détection pouvait se résumer de la sorte :

$|\text{vivant}\rangle |D_r\rangle \rightarrow |\text{vivant}\rangle |\text{vivant}\rangle_D$  avec  $|D_r\rangle$  l'état du détecteur 'ready' qui donne après mesure l'état  $|\text{vivant}\rangle$  qui correspond à la mesure 'on a détecté  $|\text{vivant}\rangle$ '. Dans le cas d'une superposition, on a de même :

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|\text{vivant}\rangle + |\text{mort}\rangle) |D_r\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|\text{vivant}\rangle |\text{vivant}\rangle_D + |\text{mort}\rangle |\text{mort}\rangle_D)$$

On a alors une superposition d'états intriqués avec le détecteur. Mais pourquoi quand on ouvre la boîte, le chat est vivant (ou mort) ?

En prenant l'exemple du chat de Schrödinger, nous avons un système à deux états. Classiquement, le chat est vivant ou mort mais tout est déterminé. Si on a tous les paramètres on peut prédire la seconde exacte de la mort du chat sans ouvrir la boîte. Si on prend en compte le caractère quantique du système, nous avons une indétermination complète sur le résultat de l'expérience. On ne pourra jamais savoir le résultat à l'avance avant d'ouvrir la boîte. En effet, si les probabilités sont de 50/50 par exemple, on sait que dans un cas sur deux on découvrira un chat mort, et dans un cas sur deux un chat vivant. Mais ici aucun déterminisme. Rien ne semble privilégier un résultat par rapport à un autre, alors pourquoi quand on fait l'expérience une fois un seul des deux résultats (vivant ou mort) existe ? Comment se fait-il que la nature 'choisisse' une réalisation ? Comment la choisit-elle ? La décohérence ne permet pas de répondre à ces questions. De ce fait de nombreuses interprétations sont possibles, et plusieurs théories essaient d'apporter des réponses à ce problème. On peut citer par exemple la théorie des multivers d'Everett.

## 3 Deux exemples pour illustrer la décohérence

Maintenant que nous avons vu que la décohérence répond (ou non) aux différents problèmes posés par la mécanique quantique des systèmes isolés, nous allons présenter ici deux modèles appliqués à des systèmes concrets.

### 3.1 Modèle simple d'un système à deux niveaux couplé avec un environnement composé de N systèmes à deux niveaux

Voici un modèle simple de décohérence tiré du livre Schlosshauer [1] qui permettrait de décrire un ensemble de qubits en interaction. On considère un système  $\mathcal{S}$  possédant deux états  $|0\rangle$  et  $|1\rangle$  et un environnement composé de N systèmes  $\mathcal{E}_i$  à deux niveaux  $|\uparrow\rangle_i$  et  $|\downarrow\rangle_i$  pour  $i = 1 \dots N$ . On peut donc décrire le système total par un produit tensoriel d'espaces de Hilbert de dimension totale  $2^{N+1}$ .

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_{\varepsilon_1} \otimes \mathcal{H}_{\varepsilon_2} \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_{\varepsilon_N}$$

où  $\mathcal{H}$  est l'espace de Hilbert du système S et  $\mathcal{H}_{\varepsilon_i}$  l'espace de Hilbert du sous-système de l'environnement  $i$ . On va supposer que le hamiltonien d'interaction  $H_{int}$  va totalement dominer la dynamique du système et de l'environnement si bien qu'on ne considèrera que lui. On considère alors un hamiltonien H tel que :

$$\begin{aligned} H = H_{int} &= \frac{1}{2}(|0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1|) \otimes \left( \sum_{i=1}^N g_i [(|\uparrow\rangle\langle \uparrow|)_i - (|\downarrow\rangle\langle \downarrow|)_i] \bigotimes_{i' \neq i} \hat{I}_{i'} \right) \\ &\equiv \frac{1}{2} \hat{\sigma}_z \otimes \left( \sum_{i=1}^N g_i \hat{\sigma}_z^{(i)} \bigotimes_{i' \neq i} \hat{I}_{i'} \right) \end{aligned}$$

où  $\hat{I}_i$  et  $\hat{\sigma}_z^{(i)}$  sont la matrice identité et la matrice de Pauli du ième sous système de l'environnement,  $\hat{\sigma}_z$  la matrice de Pauli du système et  $g_i$  le degré de couplage. Dans la suite on va simplifier la notation on omettant d'écrire le produit tensoriel avec la matrice identité, on peut donc écrire :

$$\equiv \frac{1}{2} \hat{\sigma}_z \otimes \sum_{i=1}^N g_i \hat{\sigma}_z^{(i)} = \frac{1}{2} \hat{\sigma}_z \otimes \hat{E}$$

On voit que l'environnement mesure le spin selon ce z (en mesurant l'observable  $\hat{\sigma}_z$ ), donc les états  $|0\rangle$  et  $|1\rangle$  forment la base privilégiée du système, ainsi ils ne sont pas soumis à la décohérence contrairement à toute superposition de ses deux états.

On peut voir que le hamiltonien final est diagonal dans la base  $|\uparrow\rangle_i, |\downarrow\rangle_i$  donc les états propres  $|n\rangle$  peuvent être exprimés comme le produit de ces différents états individuels :

$$|n\rangle = |\uparrow\rangle_1 |\downarrow\rangle_2 \dots |\uparrow\rangle_N, \dots$$

où  $0 \leq n \leq 2^N - 1$ . L'énergie associée à ces états est alors :

$$\epsilon_n = \sum_{i=1}^N (-1)^{n_i} g_i$$

où  $n_i = 1$  si ième spin de l'environnement est dans l'état down et 0 sinon. On peut alors écrire n'importe quel vecteur du système  $\mathcal{SE}$  sous la forme :

$$|\Psi\rangle = \sum_{n=0}^{2^N-1} (c_n |0\rangle + d_n |1\rangle) |n\rangle$$

Supposons qu'avant l'interaction nous ayons au temps  $t = 0$  un état factorisé :

$$|\Psi(0)\rangle = (a |0\rangle + b |1\rangle) \sum_{n=0}^{2^N-1} c_n |n\rangle$$

Il vient après évolution du à l'hamiltonien H :

$$|\Psi\rangle = e^{-i\hat{H}t} |\Psi(0)\rangle = a |0\rangle |\mathcal{E}_0(t)\rangle + b |1\rangle |\mathcal{E}_1(t)\rangle$$

avec

$$|\mathcal{E}_0(t)\rangle = |\mathcal{E}_1(-t)\rangle = \sum_{n=0}^{2^N-1} c_n e^{-i\epsilon_n t/2} |n\rangle$$

On peut alors utiliser le formalisme de la matrice densité comme nous l'avons précédemment pour ainsi voir que les termes d'interférences sont proportionnels à  $\langle \mathcal{E}_1(t) | \mathcal{E}_0(t) \rangle$ , on pose alors le facteur de décohérence  $r(t)$  :

$$r(t) \equiv \langle \mathcal{E}_1(t) | \mathcal{E}_0(t) \rangle = \sum_{n=0}^{2^N-1} |c_n|^2 e^{-i\epsilon_n t}$$

Il est possible de montrer que, lorsque  $N$  est grand et que les termes de couplage  $g_i$  suivent une distribution large, le recouvrement s'exprime comme suit :

$$r(t) \approx e^{-\Gamma^2 t^2}$$

où  $\Gamma$  est un terme déterminé à partir de l'état initial de l'environnement et des termes de couplage  $g_i$ . On obtient un terme de cohérence qui décroît comme une gaussienne avec le temps.

On veut maintenant savoir comment va évoluer le recouvrement  $r(t)$  en fonction du temps et du nombre de particule  $N$ . On peut voir que  $r(t)$  s'exprime comme une somme de  $2^N$  vecteurs (dans le plan complexe) de longueur  $|c_n|^2$  tournant dans le plan complexe à une fréquence proportionnelle à  $\epsilon_n$ . A un temps fixé cela équivaut à une marche aléatoire. On va donc évaluer la valeur  $\langle |r(t)|^2 \rangle$  mais pour cela il faut d'abord calculer  $\langle |c|^2 \rangle$ .

$$\langle |c|^2 \rangle = \frac{\sum_{n=0}^{2^N-1} |c_n|^2}{2^N} = \frac{1}{2^N}$$

On a alors d'après la théorie de la marche aléatoire :

$$\langle |r(t)|^2 \rangle = \langle |c|^2 \rangle = 2^{-N}$$

On voit que le degré de décohérence diminue exponentiellement avec le nombre  $N$  de systèmes interagissant avec notre système ce qui explique la décohérence si rapide des systèmes macroscopiques (dans le cadre de ce modèle).

Afin d'avoir une idée du temps de décohérence, voici quelques valeurs de ce temps pour deux systèmes : un grain de poussière ou une grande molécule, dans le cadre de modèles théoriques de diffusion de particules sur le système.

Type d'environnement	grain de poussière (s)	grande molécule (s)
Rayonnement cosmique	1	$10^{24}$
Photon à température ambiante	$10^{-18}$	$10^6$
Meilleur vide de laboratoire	$10^{-14}$	$10^{-2}$
Air à pression normale	$10^{-31}$	$10^{-19}$

### 3.2 Interférométrie de molécules $C_{70}$

L'expérience des fentes d'Young ainsi que l'expérience d'Akari Tonomura (qui est l'équivalent des fentes d'Young avec les électrons) ont permis de montrer que les photons et électrons sont des ondes donc ne sont pas parfaitement localisés. Ici nous allons décrire une expérience équivalente réalisée avec des molécules  $C_{70}$  à partir des du livre de Schlosshauer [1].

Tout d'abord nous allons comparer ces molécules aux électrons pour montrer qu'elles sont beaucoup plus grandes. En effet chaque atome de carbone est composé de six protons, six neutrons et six électrons, donc la molécule est composée de plus de 1000 particules. Si on calcul la longueur de De Broglie  $\lambda = h/mv$  on obtient un résultat de l'ordre du picomètre (les vitesses des molécules dans l'expérience sont de l'ordre de 100m/s). Comme la taille des fentes et la distance inter-fente doit être de l'ordre de grandeur de la longueur d'onde de De Broglie, on voit qu'il est impossible de réaliser des fentes de cette taille. Pour parer ce problème, les expérimentateurs ont utilisé l'effet Talbot-Lau qui consiste à placer une grille de fentes

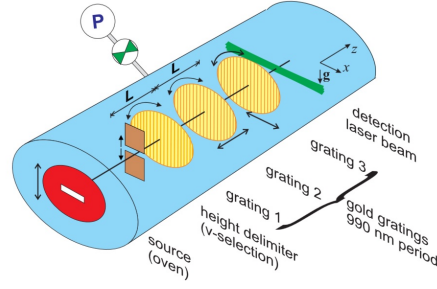


FIGURE 3: Montage expérimental pour observer les interférences des molécules  $C_{70}$ . Issu des expériences de Zeilinger [4].

perpendiculairement à l'onde incidence (considérée comme plane). Il en résulte à des distances égales à des multiples entiers de  $L_\lambda$ , une figure d'interférence équivalente à la grille, c'est à dire des maxima d'intensité aux endroits où il y avait des trous et des minima où il y avait des obstacles. Cette longueur s'exprime comme :

$$L_\lambda = \frac{d^2}{\lambda}$$

où  $d$  est la distance entre les fentes qui dans l'expérience est de l'ordre du micromètre. Donc ici  $L_\lambda \approx 1m$  ce qui est clairement exploitable expérimentalement.

Le montage expérimental est placé sous vide. Les molécules sont émises depuis une source puis passent à travers trois grilles identiques. La première grille sert à induire un degré de cohérence entre les molécules de telle sorte que des phénomènes d'interférences puissent être observés. La grille du milieu est la grille de diffraction. La troisième grille est placée à la distance  $L_\lambda$  et sert à compter les molécules en fonction de leurs positions. En effet, en la déplaçant latéralement, le nombre de molécules va fluctuer entre un maximum et un minimum s'il y a des phénomènes d'interférences.

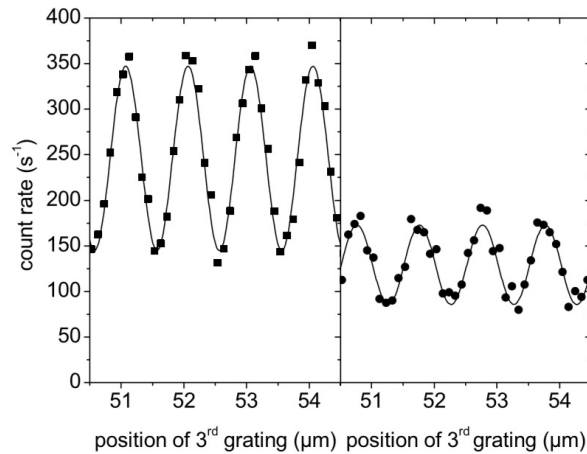


FIGURE 4: Interférence des molécules  $C_{70}$  pour deux pressions différentes (plus élevée à droite). On voit que le phénomène d'interférence diminue quand la pression augmente, en effet l'environnement interagit plus avec les molécules lorsque la pression est plus élevée. Graphique issu des expériences de Zeilinger [4].

Le résultat de l'expérience montre clairement l'apparition de franges d'interférences qui sont dues aux propriétés de la molécule elle-même et non aux interactions entre les molécules. On peut effectivement remarquer que les molécules sont très grandes et possèdent un très grand nombre de degrés de liberté. Il est alors impossible que deux molécules soient dans le même état et très proche l'une de l'autre, donc les

interférences à plusieurs molécules sont impossibles.

Afin de mettre en évidence le phénomène de décohérence on peut changer le "degré de vide", c'est à dire

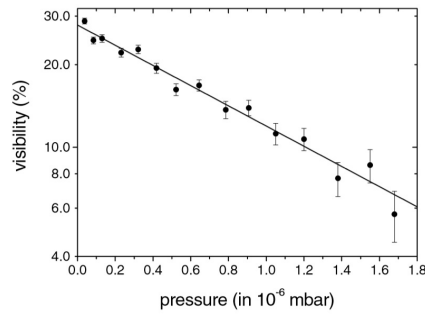


FIGURE 5: Décohérence des molécules  $C_{70}$  en fonction de la pression. La courbe en trait plein est la courbe théorique. On voit que le processus suit une loi exponentielle (échelle logarithmique) s'accordant très bien avec le modèle théorique. Graphique issu des expériences de Zeilinger [4].

la pression à l'intérieur du dispositif expérimental. En effet, ce sont les collisions avec les particules du gaz ou les photons qui sont ici la cause majoritaire de la décohérence des molécules. On peut alors voir que lorsque la pression augmente, la différence entre le maximum et le minimum des pics diminue, on a une baisse de contraste, et lorsqu'on trace ce contraste en fonction de la pression on voit qu'il diminue exponentiellement, s'accordant très bien avec les prédictions théoriques.

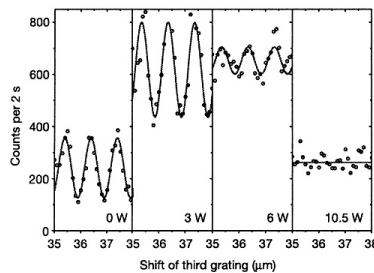


FIGURE 6: Figures d'interférence des molécules  $C_{70}$  pour plusieurs puissances laser d'excitation différentes. Quand les molécules sont préparées à température trop élevée, la décohérence par émission thermique devient plus importante pouvant mener à la disparition des interférences. Issu des expériences de Hackermüller [5].

Il faut noter que les collisions ne sont pas la seule source de décohérence. Il y a par exemple l'émission thermique des molécules. Elles peuvent effectivement absorber des photons et en émettre codant dans l'environnement des informations concernant leur position. Mais phénomène reste faible à température ambiante. Cependant dans le cas de systèmes macroscopiques, la perte de cohérence due à l'émission thermique est extrêmement élevée, et on peut voir que nos molécules  $C_{70}$  sont à la frontière entre le macroscopique et le microscopique, car lorsqu'elles sont préparées avec une température plus élevée on peut faire disparaître les interférences.

## 4 Conclusion

Dans la théorie de la décohérence, la mesure n'est plus considérée comme classique contrairement à ce qui est dit dans l'interprétation de la mécanique quantique de Copenhague. Elle suit le schéma de Von Neumann qui admet que l'on peut avoir une superposition de mesures. Cependant, cette considération

entraîne des problèmes qui peuvent néanmoins être résolus grâce à la théorie de la décohérence. Le premier est celui de la base privilégiée. En effet il semblerait que certaines mesures puissent être égales dans n'importe quelle base d'opérateurs ne commutant pas. Cela revient à dire que notre appareil a mesuré des quantités physiques différentes, or que ce n'est pas possible. Le second problème est celui de la non observation d'interférences pour les systèmes macroscopiques. En effet, si nos mesures pouvaient être en superposition on devrait s'attendre à voir des superpositions. Notre expérience quotidienne nous prouve cependant le contraire.

Le principe fondamental de la décohérence est de considérer les interactions du système avec l'environnement. Chaque interaction va intriquer une partie de l'environnement avec le système. Or celui-ci est immense et très complexe, donc il est impossible pour l'observateur de le mesurer et ainsi acquérir l'information encodé dans ses parties ayant interagi avec le système. Il en résulte une fuite d'information dans l'environnement inaccessible pour l'observateur.

En considérant cela, on peut à partir de développements théoriques, faire émerger le monde classique depuis notre interprétation de mesure quantique. En effet, il se produit ainsi une disparition des interférences due à la perte de cohérence, et l'apparition d'états privilégiés qui ne subissent pas cette décohérence. On appelle ce processus *einselection* qui mène notre système vers des états pointeurs, les états que l'on observe classiquement.

Plusieurs modèles théoriques ont été développés dans ce rapport, mais il est important de préciser que nous nous sommes placé dans des cas simples où le hamiltonien d'interaction était dominant et s'exprimait comme un simple produit tensoriel. La nature est souvent beaucoup plus compliquée, donc le hamiltonien d'interaction s'exprime alors comme une somme de produits tensoriels. Il devient donc impossible d'exprimer les états pointeurs correctement, on ne peut que les approximer.

Ces dernières années, la décohérence a également pu être mise en évidence expérimentalement. On peut citer par exemple les expériences de Serge Haroche qui étudie les photons en cavité [6], ou bien celles de Zeilinger et l'interférence des molécules  $C_{70}$ . Malgré les succès de la théorie de la décohérence on ne peut malheureusement pas répondre à tous les problèmes. Le principal problème non résolu est celui de l'unicité de la mesure. Nous avons vu qu'en raison des interactions avec l'environnement, les superpositions quantiques disparaissaient pour ne laisser place qu'à des états déterminés, c'est à dire une simple incertitude classique. Se pose alors la question du phénomène qui choisit un résultat plutôt qu'un autre. Plusieurs interprétations ont été proposées. La plus connue est l'interprétation de Copenhague, dans laquelle le principe d'effondrement de la fonction d'onde lors de la mesure impose l'existence d'une mesure en particulier. Il existe une autre interprétation qui est celle d'Everett. Comme il n'y a rien physiquement qui permet de privilégier une sortie plutôt qu'une autre (on pourrait parler d'une symétrie), alors pour conserver toutes les possibilités (et ainsi préserver la symétrie), il faudrait que tous les événements se produisent. C'est en cela qu'Everett a émis l'hypothèse d'un univers en branches où tous les événements se produisent. A chaque "choix", l'univers se sépare en plusieurs branches et les réalise donc tous [7].

## Références

- [1] Wojciech H. Zurek. Decoherence and the transition from quantum to classical. *Los Alamos Science*, 2002.
- [2] Maximilian Schlosshauer. *Decoherence and the quantum-to-classical transition*. Springer, 2007.
- [3] Jean Dalibard. *Mécanique Quantique*. Editions de l'école Polytechnique, 2005.
- [4] A. Zeilinger. Matter-wave interferometer for large molecules. *Physical review*, 2002.
- [5] L. Hackermüller. Decoherence of matter waves by thermal emission of radiation. *Nature*, 2004.
- [6] S. Haroche. Controlling photons in a box and exploring the quantum to classical boundary. *Reviews of modern physics*, 2013.
- [7] H. Everett. "relative state" formulation of quantum mechanics. *Reviews of modern physics*, 1957.