

Projet TP

Effet Aharonov-Bohm dans sa baignoire

G. Butseraen et C. De Marez

13 mars 2017

Introduction

Ce rapport présente les résultats obtenus au cours du projet TP nommé "Effet Aharonov-Bohm dans sa baignoire". Nous avons dans un premier temps pris soin de rappeler les fondements théoriques importants nécessaires à la compréhension du sujet. L'analogie entre l'effet Aharonov-Bohm et l'hydrodynamique a ensuite pu être testée expérimentalement à travers l'observation de dislocations de fronts d'onde traduisant l'apparition de la phase de Berry. Enfin, pour mettre en évidence l'apparition de cette phase de manière plus intuitive, nous avons réalisé un dispositif type fentes d'Young et observé l'impact de la phase de Berry sur la figure d'interférence.

Table des matières

1	Simuler la mécanique quantique avec l'hydrodynamique	1
1.1	Effet Aharonov-Bohm	1
1.2	Vortex plongé dans un fluide où se propagent des ondes de surface	2
1.2.1	Déphasage des ondes de surface par un vortex	3
1.2.2	Analogie	3
2	Mesures et traitements préliminaires	4
2.1	Mesure de la relation de dispersion des ondes de surface	4
2.2	Etude du vortex	4
3	Observation de l'effet Aharonov-Bohm hydrodynamique	6
4	Décollage des fentes d'Young	9
4.1	Fentes d'Young hydrodynamiques	9
4.2	Ajout du vortex : effet Aharonov-Bohm-Young	10
A	Dispositif expérimental	12
B	Méthodes d'observation	12
B.1	Observation de l'ombre de la surface	12
B.2	Reflexion d'une nappe laser	13
B.3	Caractérisation du vortex en PIV	14

1 Simuler la mécanique quantique avec l'hydrodynamique

Afin de faire l'analogie entre les deux phénomènes, l'effet Aharonov-Bohm et la propagation d'ondes planes à la surface d'un liquide sont étudiés dans cette partie.

1.1 Effet Aharonov-Bohm

Cette partie a été construite en s'appuyant sur le rapport d'une conférence du département de physique de l'Université de Ljubljana sur [4] et [1].

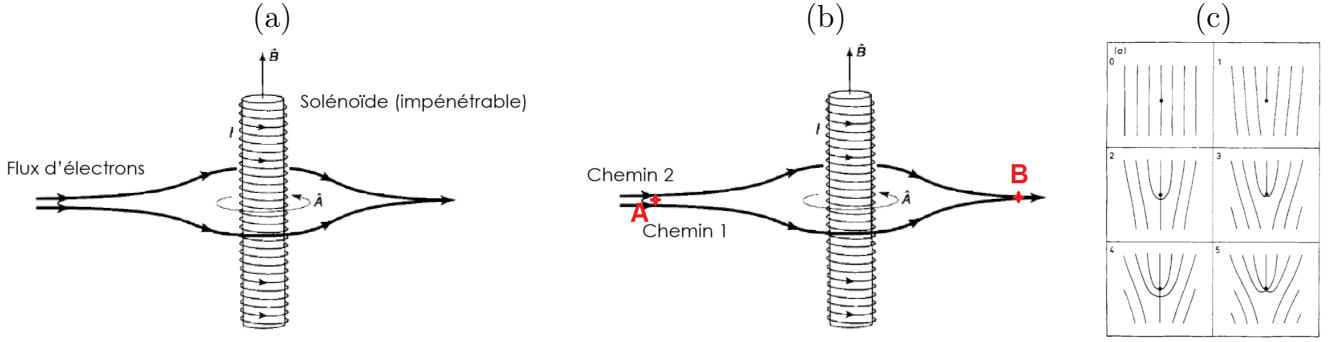


FIGURE 1: (a) Des électrons délocalisés arrivent sous forme d'ondes planes sur un solénoïde impénétrable contenant un champ magnétique. A aucun moment les électrons n'interagissent avec celui-ci. (b) Calcul du déphasage lorsque les électrons empruntent deux chemins différents. L'un passe devant le solénoïde alors que l'autre passe derrière. On démontre que le déphasage est proportionnel au flux du champ magnétique à travers la surface délimitée par les deux chemins. (c) Dislocation de fronts d'onde en fonction du paramètre α allant de 0 à 5 (Berry et al. [1]). Les électrons arrivent de la gauche et le solénoïde est représenté par le point au milieu de chaque image (vu du dessus). Le nombre de fronts d'ondes supplémentaire au dessus du solénoïde est égal à l'entier le plus proche de α .

L'effet Aharonov Bohm est un effet purement quantique qui se produit lorsqu'on envoie des électrons de charge q délocalisés sur un solénoïde impénétrable parcouru par un courant (figure (1(a))). Le champ magnétique $\vec{B}$ est nul à l'extérieur, mais pas le potentiel vecteur $\vec{A}$. Les électrons se comportent comme des ondes planes et n'interagissent jamais avec le champ magnétique $\vec{B}$ créé dans le solénoïde. Pourtant, sa présence entraîne une modification de phase de la fonction d'onde des électrons.

Pour comprendre cet effet, il faut résoudre l'équation de Schrödinger :

$$H\Psi = E\Psi \quad (1)$$

avec :

$$H = \frac{1}{2m}(\mathbf{p} - q\mathbf{A}(\mathbf{r}, t))^2 + q\phi(\mathbf{r}, t) \quad (2)$$

où $\mathbf{p}$ est l'impulsion, $\mathbf{A}$ le potentiel vecteur et ϕ le potentiel scalaire. Comme le champ électrique est nul et que l'on étudie les solutions stationnaires, on a $\phi = 0$. De plus, le champ magnétique étant nul en dehors du solénoïde, il est possible d'écrire $\mathbf{A}$ sous la forme d'un gradient :

$$\mathbf{A} = \nabla\Lambda \quad (3)$$

La résolution de l'équation de Schrödinger donne alors le résultat suivant :

$$\Psi(\mathbf{r}) = e^{i\frac{q}{\hbar}\Lambda}\Psi_0 \quad (4)$$

où Ψ_0 est la solution de l'équation de Schrödinger avec $\mathbf{A} = \mathbf{0}$. La fonction d'onde des électrons est simplement modifiée par un facteur de phase égal à $\frac{q}{\hbar}\Lambda$, avec :

$$\Lambda = \int_0^r \mathbf{A}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}' \quad (5)$$

Cet effet de phase est visible lorsqu'on s'intéresse au déphasage entre deux chemins suivis par les électrons. Par exemple, lorsqu'on calcule le déphasage $\Delta\phi$ entre un chemin passant devant le solénoïde et un chemin passant derrière (figure 1(b)), on trouve :

$$\Delta\phi = \frac{q}{\hbar}\Phi \quad (6)$$

où Φ est le flux du champ magnétique à travers la surface délimitée par la boucle. La différence de phase est donc directement proportionnelle à ce flux. On vient de démontrer que bien que les électrons n'interagissent jamais avec le champ $\mathbf{B}$, il y a déphasage seulement si le champ est non nul dans le solénoïde.

Le calcul numérique de l'effet de ce déphasage sur les fronts d'onde a été réalisé dans l'article de Berry [1]. On peut voir apparaître des dislocations de fronts d'onde qui dépendent du paramètre $\alpha = \Delta\phi/2\pi$ (figure 1(c)). Cela signifie qu'il y a plus de fronts d'onde d'un côté du solénoïde que de l'autre. Le nombre de front d'onde supplémentaire est égal à l'entier naturel le plus proche du paramètre α . Nous allons montrer que ce type de phénomène n'est pas spécifique à la mécanique quantique.

1.2 Vortex plongé dans un fluide où se propagent des ondes de surface

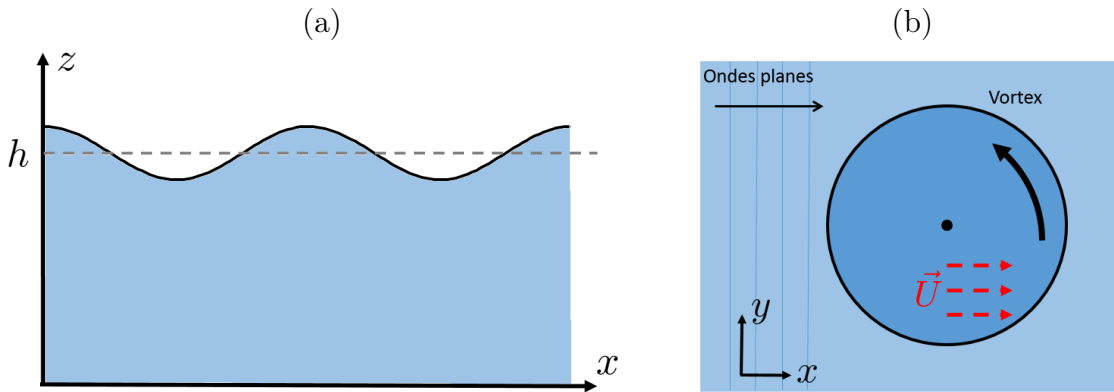


FIGURE 2: (a) Propagation d'ondes planes à la surface d'un fluide. (b) Vortex plongé dans les ondes planes, vue de dessus.

L'étude de l'effet Aharonov-Bohm fait intervenir des ondes planes représentant les électrons. L'analogie naturelle à ce phénomène en hydrodynamique est la propagation des *ondes de surface* (situation décrite sur la figure 9(a)). Cette partie a été construite en s'appuyant sur [3]. Pour décrire ces ondes, il faut partir de l'équation de Navier-Stokes décrivant un fluide soumis à la force volumique de pesanteur :

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right) = -\nabla P + \eta \Delta \mathbf{v} + \rho \mathbf{g} \quad (7)$$

En supposant l'écoulement potentiel (avec $\mathbf{v} = \nabla \Phi$ où Φ est le potentiel des vitesses), irrotationnel, et en négligeant les termes visqueux et non linéaires (approximation des petites amplitudes), l'équation (7) devient :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{P}{\rho} + gz = \text{cste} \quad (8)$$

En utilisant les conditions aux limites d'un fluide parfait, et la discontinuité de la pression à la surface imposée par la tension superficielle, si on cherche une solution sous la forme d'une onde plane, on obtient la relation de dispersion :

$$\omega^2 = kg(1 + k^2 l_c^2) \tanh(kh) \quad (9)$$

où $l_c = \sqrt{\frac{\gamma}{\rho g}}$ est la longueur capillaire associée au fluide étudié. La propagation des ondes se faisant le long de l'axe $\mathbf{x}$, des effets tridimensionnels apparaissent, car la hauteur d'eau h intervient dans la relation de dispersion. Cette relation de dispersion est celle des ondes de surface car les modes de vibrations du potentiel des vitesses sont liés linéairement aux modes de déformation de la surface libre.

Il est possible de simplifier la relation (9) dans les cas limites :

Si $kh \gg 1$: régime d'*eaux profondes*, pour lequel si la longueur d'onde est grande devant la longueur capillaire ($kl_c \ll 1$) les ondes sont appelées *ondes de gravité* et $\omega = \sqrt{kg}$. Le moteur des ondes est alors seulement la gravité. Si à l'inverse la longueur d'onde est petite devant la longueur capillaire ($kl_c \gg 1$) on les appelle *ondes capillaires* avec $\omega = k^{\frac{3}{2}} \sqrt{\gamma \rho^{-1}}$ et seule la capillarité du fluide est moteur du mouvement. Si $kh \ll 1$: régime d'*eaux peu profondes* où, dans le cas des grandes longueurs d'onde, $\omega = k\sqrt{gh}$. Nous verrons dans la suite de ce rapport que dans le cadre de ce projet, aucune de ces approximations ne peut être effectuée, et la relation de dispersion complète (9) sera utilisée.

1.2.1 Déphasage des ondes de surface par un vortex

Lorsqu'une onde plane (comme celles étudiées ci-dessus) se déplace dans un milieu mouvant à la vitesse U , elle peut s'écrire :

$$\begin{aligned} \Phi(x, z, t) &= \Phi_0 e^{i(k(x-Ut) - \omega t)} \Psi(z) \\ &= \Phi_0 e^{i(kx - (\omega + kU)t)} \Psi(z) \end{aligned} \quad (10)$$

On a ainsi

$$\omega(k, r) \rightarrow \omega\left(\left|k + \frac{Uk}{v_g}\right|, r\right) \quad (11)$$

où v_g est la vitesse de groupe des ondes planes, que l'on connaît à partir de la relation de dispersion (9). Cette relation est vraie tant que $U \ll v_g$.

Pour faire l'analogie avec l'effet Aharonov-Bohm, nous avons imaginé avec l'aide d'articles ([1] et [2]) plonger un vortex dans la cuve où se propage les ondes planes (figure 9(b)). Celui-ci pourra alors être identifié au solénoïde impénétrable de l'effet Aharonov-Bohm. Si les particules fluides sont mises en mouvement par un vortex imposant une vitesse tangentielle U , le déphasage sur les ondes planes de surface peut être calculé de la même manière que pour l'effet Aharonov-Bohm. En faisant le calcul du déphasage sur deux chemins entourant le vortex, on obtient :

$$\begin{aligned} \Delta\phi &= \frac{k \oint \mathbf{U}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}}{v_g} \\ &= 2\pi \frac{\Gamma}{\lambda v_g} \end{aligned} \quad (12)$$

1.2.2 Analogie

Force est de constater que ce déphasage est similaire à celui produit dans le cas de l'effet Aharonov-Bohm sur les électrons délocalisés (sous forme d'ondes planes). Il est alors possible d'établir une analogie entre l'effet Aharonov-Bohm et les ondes de surfaces se propageant sur un vortex.

Dans le cas de l'effet Aharonov-Bohm, le déphasage entre deux chemins contournant le solénoïde est donné par l'équation (6). On a alors l'analogie :

$$\frac{q}{h} \Phi \leftrightarrow \frac{\Gamma}{\lambda v_g} \quad (13)$$

Il sera donc possible, tout comme dans l'effet Aharonov-Bohm, de caractériser les dislocations de fronts d'onde (localisées autour du vortex) dans le fluide en fonction du paramètre $\alpha = \frac{\Gamma}{\lambda v_g}$.

2 Mesures et traitements préliminaires

Après avoir développé la théorie de notre problème, nous présentons dans cette partie les différentes mesures préliminaires effectuées. Ces mesures ont eu pour but de préparer le terrain avant de passer à l'observation de l'effet AB hydrodynamique à proprement parlé.

Le matériel utilisé, le dispositif expérimental, ainsi que les méthodes de prises d'images (spécifique à chaque phénomène étudié) sont détaillés en appendice.

2.1 Mesure de la relation de dispersion des ondes de surface

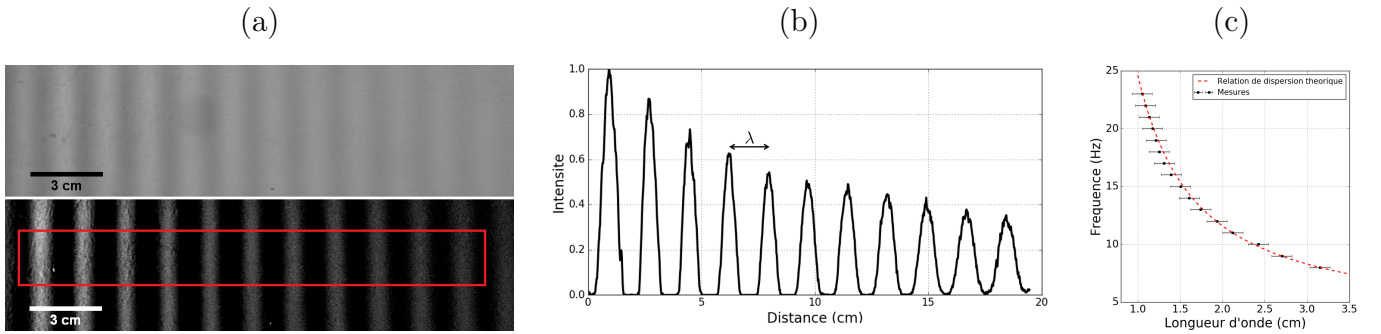


FIGURE 3: (a) Mesure de la longueur d'onde, $h=9.8$ cm et $\nu=13$ Hz. En haut : Photo du fond de la cuve où l'ombre des fronts d'onde est visible. En bas : Photo après soustraction de la photo sans ondes et augmentation du contraste. (b) Profil d'intensité mesuré dans la zone rouge (figure (a) en bas), la longueur d'onde est mesurée à partir de la distance entre les pics. (c) Relation de dispersion mesurée et théorique. Chaque point est la moyenne sur les différentes hauteurs, et l'incertitude est définie comme le plus grand écart type de la série de données

Afin de tester le dispositif expérimental une première fois, et vérifier l'accord de nos observations avec la théorie, la relation de dispersion a été mesurée.

Les fréquences entre 8 et 22 Hz sont balayés, pour 4 hauteurs d'eau différentes ($h=4.9, 7.5, 9.8$ et 12.5 cm). Il s'avère que dans cette gamme de fréquence et de hauteur, $\tanh(kh) = 1$. Ainsi on peut négliger l'influence de la hauteur sur la relation de dispersion (9). Pour chaque valeur de fréquence imposée, la moyenne des longueurs d'onde pour les différentes hauteur est calculée. La relation de dispersion est tracée sur la figure 3(c). Les mesures étant cohérentes avec la théorie, nous utiliserons la relation de dispersion théorique pour déterminer la vitesse de groupe et la longueur d'onde en fonction de la fréquence.

2.2 Etude du vortex

Un des éléments principal de notre montage expérimental est le vortex au centre de la cuve. Afin d'avoir une idée de son comportement, la caractérisation de celui-ci a été menée. Pour expliquer notre démarche d'analyse du vortex, nous présentons ici l'étude d'un vortex créé par un agitateur magnétique réglé à 100 tr/min.

Sur les images obtenues (4(a), voir méthode d'observation en appendice), on peut voir la surface de l'eau colorée, où les grains de poivre sont mis en rotation autour du centre du vortex. On peut également

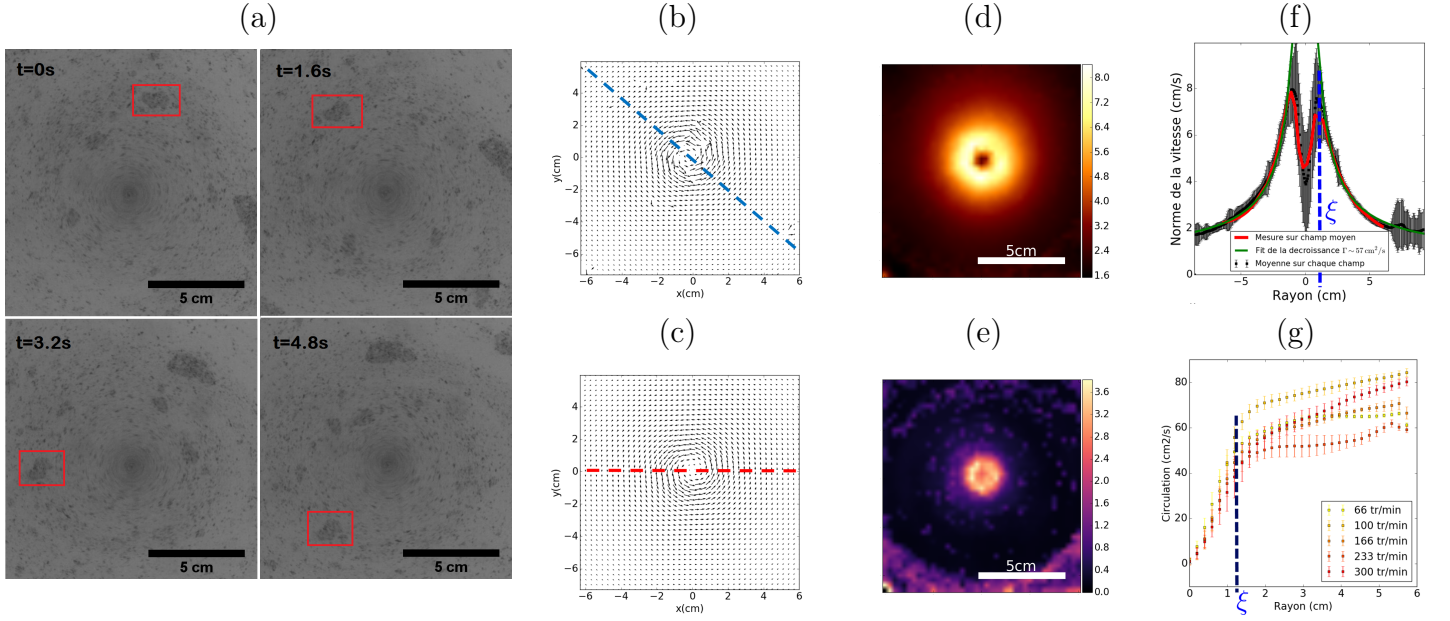


FIGURE 4: Traitement PIV du vortex pour une vitesse d'agitateur magnétique de 100 tr/min. (a) Séquence d'images issue de la captation vidéo du vortex. En rouge est encadré un "bloc" de poivre qui semble bouger en translation circulaire. (b) Champ de vitesse instantané obtenu en PIV à partir de deux images successives. En bleu est indiquée la ligne le long de laquelle la norme de la vitesse est mesurée. (c) Champ de vitesse moyenné sur tous les instants. En rouge est indiquée la ligne le long de laquelle est mesurée la norme de la vitesse. (d) Carte de la norme de la vitesse moyenne. (e) Carte de l'écart type de la norme de la vitesse. La zone rouge au centre est due aux petits déplacements du vortex et à "l'aspiration" du poivre par le vortex. (f) Tracé de la norme de la vitesse en fonction du rayon. En noir on a moyenné les mesures pour chaque instant (ligne bleue de la figure (b)), et l'incertitude est l'écart type de la série de vitesse à une valeur de rayon donnée. En rouge la mesure est effectuée sur le champ moyen (ligne rouge de la figure (c)). Le rayon typique du cœur du vortex ξ est indiqué en bleu. (g) Circulation du vortex en fonction du rayon pour différents réglages de l'agitateur magnétique, correspond au modèle théorique : la circulation augmente linéairement puis est constante. L'incertitude est définie comme l'écart type pour chaque point (qui est une moyenne temporelle).

voir que, localement, les particules fluides semblent se déplacer en translation circulaire (encadré rouge). Cette observation bien que non systématique a permis de confirmer en partie l'approximation d'écoulement potentiel (donc irrotationnel).

Le traitement PIV extrait de chaque image un champ instantané (figure 4(b)) possédant un certain nombre de discontinuités. Cela est dû à l'inhomogénéité de la répartition de particules en surface, et à la disparition sous la surface de celles plus proches du centre. Afin d'avoir un aperçu global du champ de vitesse du vortex, le champ est moyenné pour chaque instant. Le champ de vitesse moyen est présenté sur la figure 4(c). Le moyennage a permis de gommer les discontinuités du champ, et celui-ci semble conforme aux attentes. Afin d'avoir un aperçu de la variation de la norme, les cartes de la moyenne (figure 4(d)) et de l'écart type (figure 4(e)) de la norme de la vitesse sont tracées. On peut voir que la valeur de la vitesse augmente avec le rayon, puis diminue à l'infini. La répartition de l'écart type renseigne sur le déplacement du vortex. En effet on voit un cercle réparti autour du centre du vortex "moyen" qui résulte du déplacement du vortex au cours du temps, mais également de l'aspiration et du regroupement des particules lorsqu'elles se trouvent proches du centre.

Afin de caractériser plus finement ce vortex, et de le comparer aux modèles théoriques, nous avons voulu

tracer la vitesse tangentielle v_θ en fonction du rayon. La vitesse étant uniquement selon $\mathbf{e}_\theta$, cela revient à tracer la norme de la vitesse en fonction du rayon. Pour cela deux techniques ont été utilisées. La première a consisté à mesurer la norme de la vitesse le long d'une ligne passant par le centre du vortex à chaque instant. Ensuite, pour chaque valeur de rayon, la vitesse est moyennée (sur le temps) et l'incertitude sur la mesure est l'écart type. Cette mesure est présentée en noire sur la figure 4(f). La deuxième mesure (en rouge sur la même figure) a consisté à mesurer cette vitesse directement sur le champ moyen. Les deux tracés coïncident.

Le modèle d'un vortex décrit par un cylindre de vorticité (de rayon ξ marquant la limite du *coeur* du tourbillon) pr d t une évolution linéaire de la vitesse radiale $v_\theta = \Omega r$, pour $r < \xi$ (Ω est la vitesse de rotation (constante)). Ensuite la vitesse doit décroître comme, $v_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi r}$. L'évolution de la vitesse mesurée grâce à la PIV semble correspondre, avec $\xi \approx 1$ cm. En faisant un fit de la décroissance on obtient une circulation de $\Gamma \sim 57 \text{ cm}^2/\text{s}$.

Enfin à partir de PIVlab, et d'un programme de traitement, la circulation du vortex est calculée en fonction du rayon (comme pour la vitesse, pour une valeur de rayon, la valeur est obtenue en moyennant sur le temps, et l'incertitude est l'écart type). La figure représentant le résultat de ce calcul pour tous les vortex étudiés est présentée sur la figure 4(g). La théorie pr d t une augmentation linéaire de la circulation jusqu'au rayon ξ , puis une circulation constante. Sur le tracé, les résultats semblent correspondre avec un tel comportement, avec ξ proche de celui mesuré sur la figure 4(f). Dans le cas étudié plus haut (100 tr/min), la circulation en $r = \xi$ est d'environ $65 \text{ cm}^2/\text{s}$. Cela est en accord avec la valeur obtenue en faisant le fit de la décroissance.

Le traitement ci dessus correspond à l'analyse du premier vortex qui a été mis en place dans la cuve. Nous avons ensuite fait varier la vitesse. Cependant, on peut voir sur la figure 4(g) que les différentes valeurs de circulation n'augmentent pas avec la vitesse de rotation de l'agitateur magnétique. Après différents tests a posteriori il est apparu que l'agitateur que nous avons utilisé chauffait au bout d'un certain temps d'utilisation, et saturait à une vitesse de rotation. Les autres mesures correspondent donc à une vitesse *réelle* du bareau magnétique d'environ 100 tr/min.

Pour la suite, nous avons utilisé un agitateur magnétique plus performant. Par sécurité, nous avons également décidé de mesurer la circulation de chaque vortex que nous avons mis en place, et l'avons défini comme la valeur moyenne de la circulation pour $r > \xi$. Ces mesures ayant pour seul but la mesure de Γ , la PIV sera effectuée directement sur l'eau translucide (car la vitesse proche du centre ne sera plus observée, et la vue de l'agitateur au fond ne posera pas de problème).

Les différents éléments de notre montage expérimental caractérisés, nous développerons dans la suite l'analogie hydrodynamique à l'effet Aharonov-Bohm, où le déphasage des ondes (présenté dans l'équation (12)) sera déterminé grâce à la relation de dispersion théorique et à des mesures PIV.

3 Observation de l'effet Aharonov-Bohm hydrodynamique

Afin de mettre en évidence l'analogie à l'effet Aharonov-Bohm, nous avons dans un premier temps effectué la même experience que dans l'article [1]. Nous avons donc fait se propager des ondes planes de surface à la fréquence ν , sur un vortex de circulation Γ .

On fait varier la vitesse de rotation de l'agitateur magnétique entre 60 et 360 tr/min, et pour chaque vitesse la circulation du vortex est mesurée. Pour chaque valeur de circulation, une gamme de fréquence de 9 à 20 Hz des ondes de surface est balayée. Au dessus de 15 Hz, les acquisitions étant difficilement exploitables, elles ne seront pas présentées ici.

Sur la figure 5(a), les résultats pour $\nu = 11$ Hz sont présentés. On peut voir le nombre de fronts d'onde en dessous du vortex augmenter à mesure que la circulation du vortex augmente. Pour chaque image le paramètre α est calculé à partir de la relation de dispersion théorique. On peut voir que le résultat est en

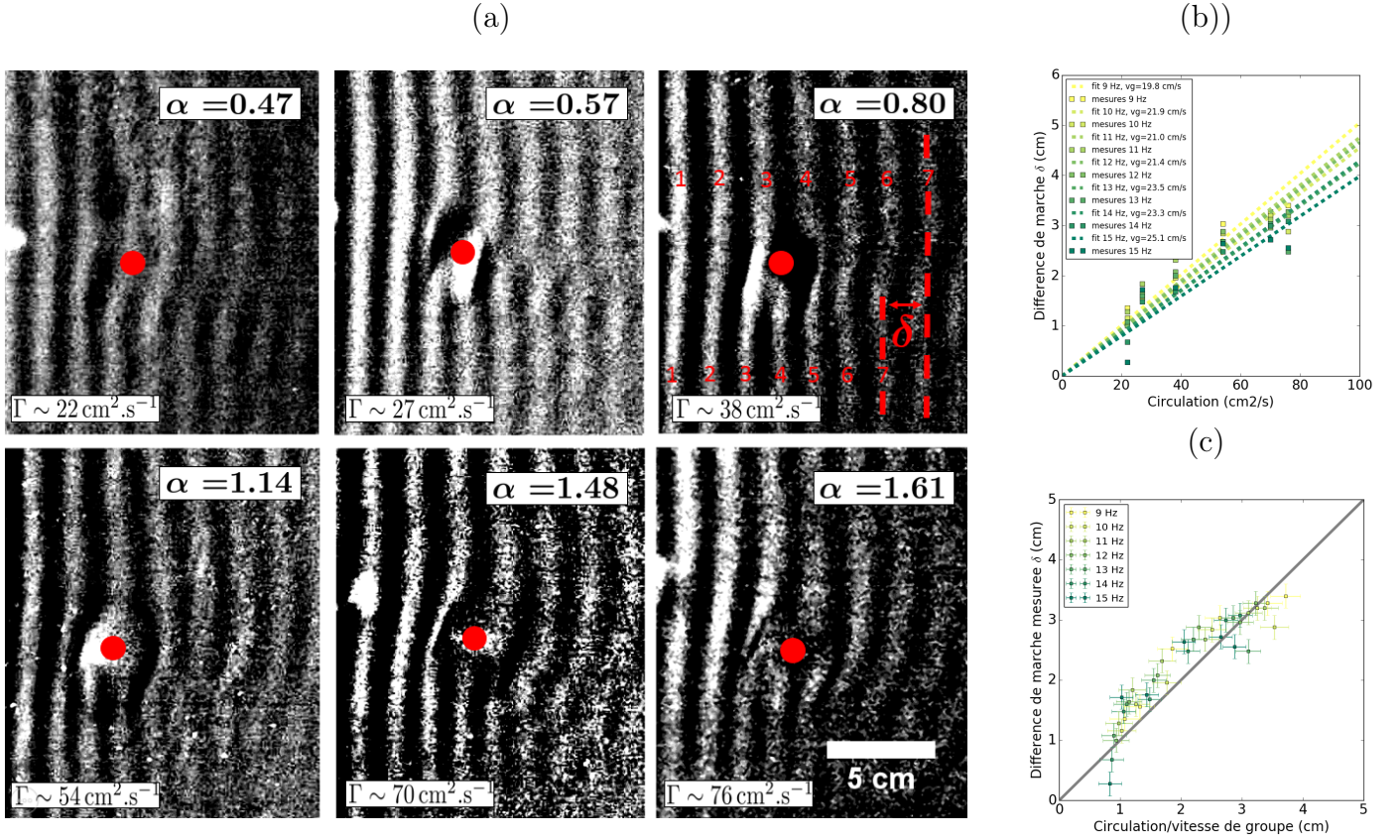


FIGURE 5: (a) Mise en évidence du déphasage des fronts d'onde, analogie à l'effet Aharonov-Bohm. Série d'observation pour $\nu = 11$ Hz, $\lambda = 2.2$ cm, $v_g = 22.5$ cm.s $^{-1}$. Chaque image correspond à une circulation de vortex différente, le centre de celui-ci étant indiqué au point rouge (rotation du vortex dans le sens anti horraire). La dislocation du front d'onde est visible autour du vortex. La théorie prédit que pour α demi entier, un front d'onde supplémentaire doit apparaître. On voit ici que pour $\alpha \sim 0.5$ un front d'onde supplémentaire est effectivement apparu. (b) Différence de marche en fonction de la circulation du vortex. La différence de marche est mesurée loin du vortex où les longueurs d'ondes sont égales, entre l'onde plane en dessous du vortex et l'onde au dessus du vortex. La théorie prédit une évolution linéaire, de coefficient directeur $\frac{1}{v_g}$ pour une fréquence fixée. Les fits linéaires réalisés pour les différentes valeurs de fréquences sont proches des valeurs théoriques. (c) Différence de marche mesurée δ en fonction de $\frac{\Gamma}{v_g}$ (incertitudes : erreurs sur la mesure du déphasage et de la circulation). Les valeurs sont proches de la droite de pente 1, et sont donc conformes aux attentes.

accord avec les prédictions théorique de [1] (figure 1(c)) concernant l'effet Aharonov-Bohm. Nous avons donc bien observé une analogie hydrodynamique.

Loin du vortex, la longueur d'onde est la même partout. On peut donc définir le déphasage comme $\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda}\delta$, où δ est la différence de marche mesurée entre deux fronts d'ondes (un au dessus, et un autre en dessous du vortex). Par exemple sur la figure 5(a), on compte sept (à partir de la gauche) fronts d'onde en haut, et sept en bas, puis on mesure δ entre les deux fronts d'ondes correspondants. Ainsi, en connaissant l'équation (12), on peut écrire

$$\delta = \frac{1}{v_g}\Gamma \quad (14)$$

A λ fixé (soit à ν fixé), il est possible de vérifier la cohérence de nos mesures en traçant la différence de marche en fonction de la circulation. En effet, si on effectue un ajustement linéaire de ces données, le

coefficient directeur de la droite doit donner la vitesse de groupe v_g des ondes. Ce tracé est présenté sur la figure 5(b). On peut voir que le résultat est plutôt consistant avec la théorie puisque pour 11 Hz par exemple on trouve une vitesse de groupe $v_g^{mes} = 21 \pm 2$ cm/s alors que la vitesse de groupe théorique est $v_g = 22.5$ cm/s. En théorie, la vitesse de groupe augmente avec la fréquence. Bien que l'incertitude soit assez importante, $\Delta v_g^{mes} = 2$ cm/s on constate bien sur ce graphe, que la pente des droites (en $\frac{1}{v_g}$) diminue avec la fréquence.

Figures libres

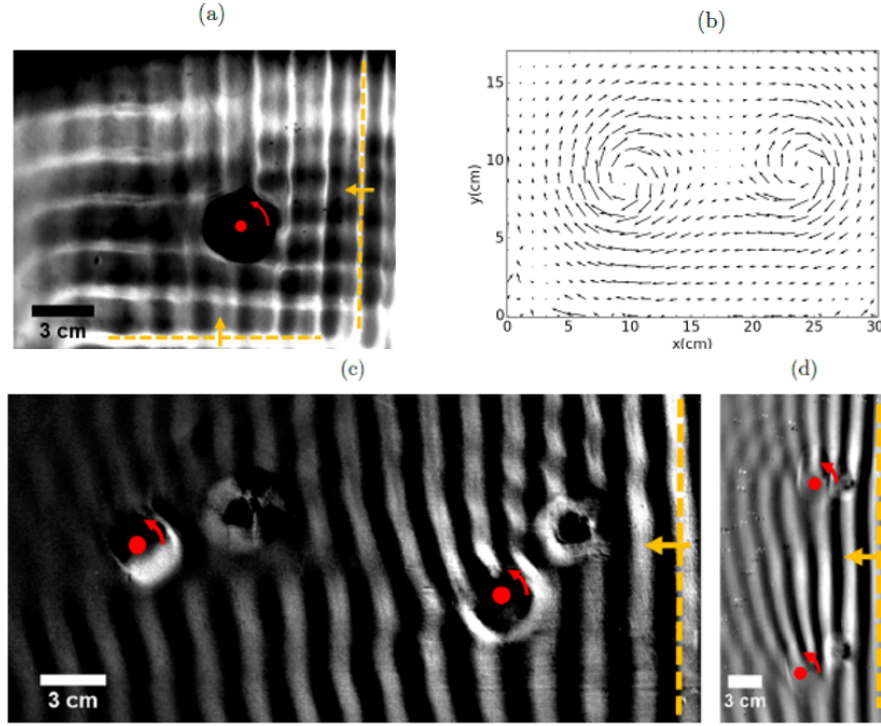


FIGURE 6: Autres types de géométrie, en jaune la position des vibreurs et le sens de propagation des ondes et en rouge les positions des vortex. (a) Deux fronts d'ondes perpendiculaires arrivant sur un vortex. (b) Aperçu du champs de vitesse (obtenu en PIV) de deux vortex placés côte à côte. (c) Un front d'onde arrivant sur deux vortex placés l'un après l'autre. (d) Un front d'onde arrivant sur deux vortex placés l'un au dessus de l'autre.

En modifiant le dispositif expérimental, c'est à dire en ajoutant un autre vortex ou un autre vibreur nous avons modifié la géométrie du système. On peut voir sur la figure 6 les différents résultats. De manière qualitative, on confirme bien l'apparition de dislocations là où la vitesse du fluide est orientée dans le sens de propagation des ondes, et ainsi le nombre de dislocation est proportionnel au nombre de vortex et de vibreur.

Dans la suite du rapport, nous utiliserons encore la notion du déphasage comme défini dans l'équation (12), mais un autre phénomène que les dislocations sera étudié, celui-ci ayant été compris et détaillé dans cette partie.

4 Décallage des fentes d'Young

Dans les différents articles étudiés, la démonstration de l'analogie hydrodynamique à l'effet AB se faisait en imitant les dislocations des ondes planes électroniques comme celles présentées sur la figure 1(c). Une autre approche consiste à observer le décalage de la figure d'interférence de fentes d'Young. Celle-ci se révèle plus pédagogique puisqu'elle ne fait pas intervenir les notions de fonction d'onde et de dislocations, mais simplement des notions élémentaires d'optique.

Théoriquement, la présence d'un solénoïde derrière des fentes d'Young doit déphaser la figure d'interférence d'un facteur $\Delta\phi^{\text{th}}$ (calculé dans l'équation (12)). Afin de simuler la présence d'un solénoïde derrière des fentes d'Young, nous avons réalisé le montage expérimental présenté en appendice. La figure d'interférence a été mesurée grâce à la réflexion à la surface d'une nappe laser.

4.1 Fentes d'Young hydrodynamiques

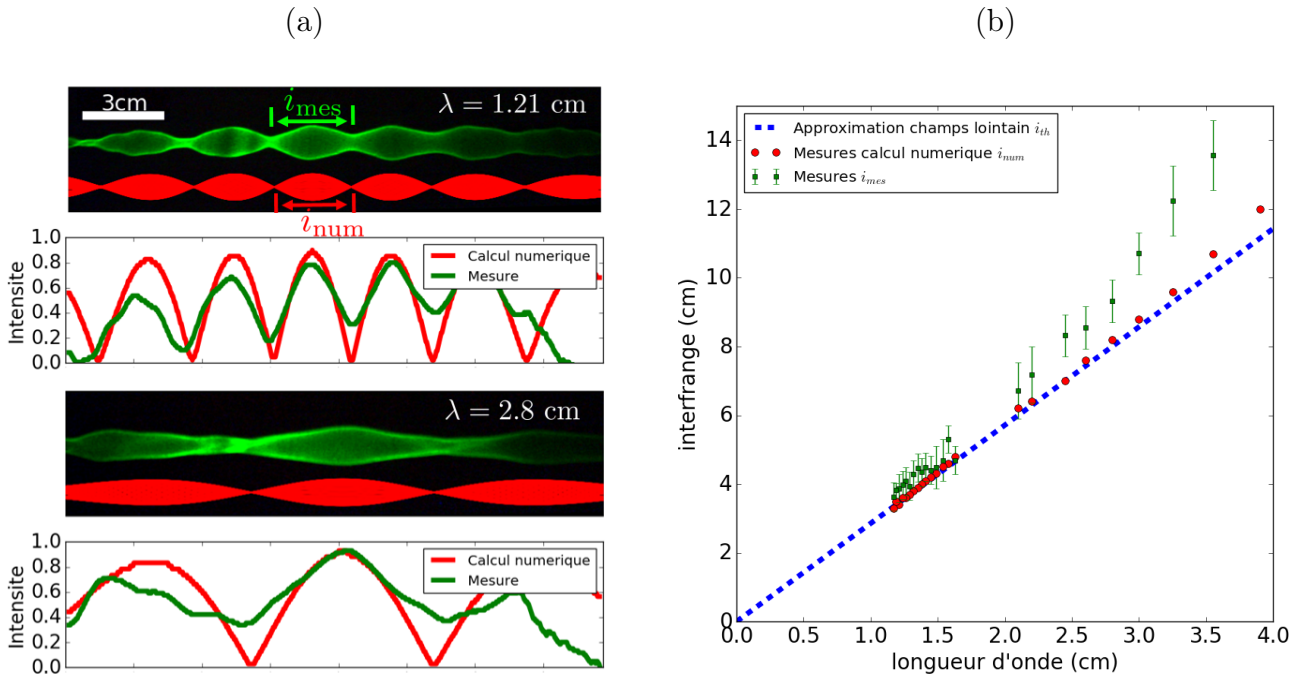


FIGURE 7: (a) Figure d'interférence obtenu pour différentes longueur d'ondes (d'excitation). En vert l'observation de la réflexion de la nappe laser, et en rouge le calcul numérique de la figure d'interférence pour $d = 20$ cm et $a = 7$ cm. L'interfrange est mesurée sur le lobe central. Pour chaque longueur d'onde, l'intensité (intégrale du signal) est tracée pour les mesures et le calcul numérique (b) Tracé des mesures d'interfrange (incertitudes : erreur sur la mesure), du modèle théorique (approximation champs lointain) ainsi que du calcul numérique.

Dans un premier temps, il a fallu vérifier que les propriétés ondulatoires des ondes de surfaces pouvait bien fournir une analogie aux ondes électromagnétiques et quantiques qui sont étudiées dans le cas des fentes d'Young. Pour cela, nous avons mesuré l'interfrange de la figure d'interférence des fentes d'Young hydrodynamiques pour une gamme de fréquence de 7 à 22 Hz.

Sur la figure 7(a), nous présentons les résultats typiques que nous avons obtenu pour chaque longueur d'ondes. En vert, l'observation de la réflexion de la nappe laser et en rouge le résultat d'un calcul numérique de la figure d'interférence. Les deux étant proche, nous avons ensuite sommé sur la verticale chaque signal afin d'obtenir l'intensité du signal, par analogie à l'intensité optique. À partir de ces résultats il a été

possible de mesurer l'interfrange i_{mes} et i_{num} comme étant la distance entre les noeuds. Cette valeur de l'interfrange définit aussi la longueur d'onde de la figure d'interférence (par analogies aux taches en optique définies par un sinus cardinal).

Sur la figure 7(b), le tracé des valeurs d'interfranges mesurées ainsi que des valeurs d'interfranges dans l'approximation champs lointain $i_{\text{th}} = \lambda \frac{d}{a}$ où d est la distance entre les sources et l'écran (lieu de réflexion de la nappe laser), et a la distance entre les sources. Pour les petites longueurs d'ondes les trois résultats coïncident. Ensuite, le calcul numérique s'éloigne un petit peu, car l'approximation $\lambda \ll d$ n'est plus valable. Nos mesures ne coïncident pas aux grandes longueurs d'onde car un phénomène de résonance de la barre du vibreur perturbe les ondes. Le signal mesurés ne présentant pas des noeuds nets de part les légères vibration de la table où était posé la cuve, nous avons définie l'incertitude sur la mesure de l'interfrange comme la *largeur* des noeud).

Cette analyse nous a donc permis de conclure que les ondes à la surface de notre cuve fournissent une analogie plausible avec les ondes étudiées en mécanique quantique et en électromagnétisme.

4.2 Ajout du vortex : effet Aharonov-Bohm-Young

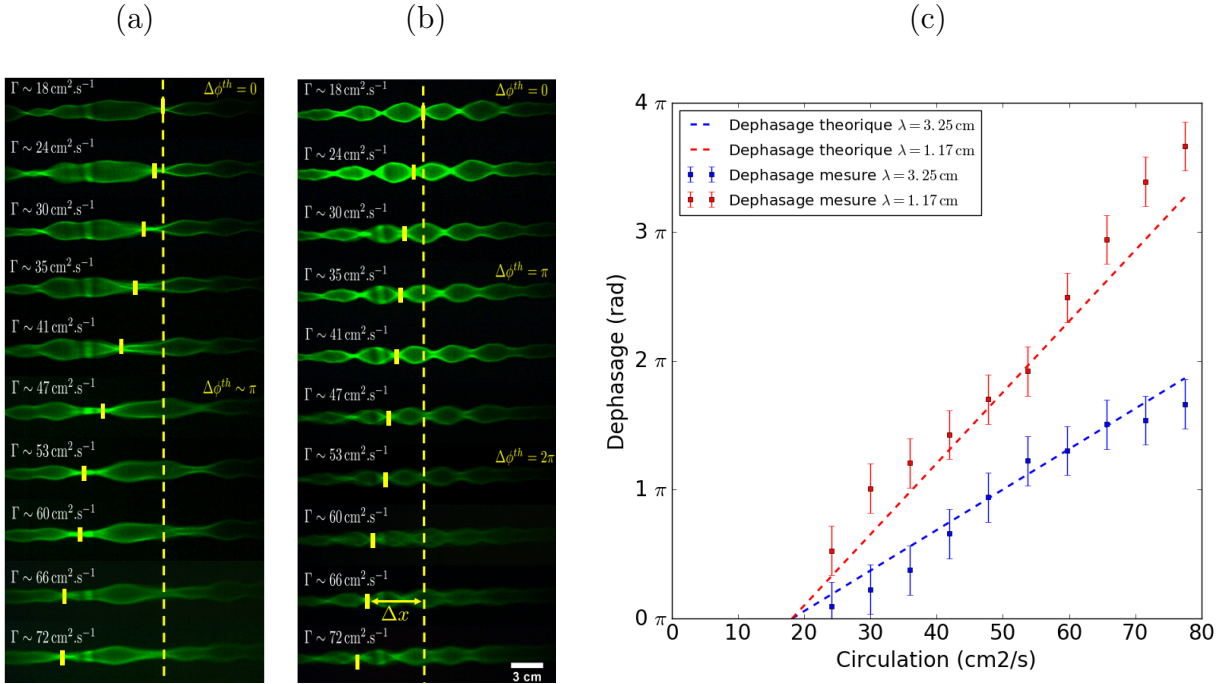


FIGURE 8: (a) et (b) Observation du décalage de la figure d'interférence des fentes d'Young due à la présence d'un vortex de circulation Γ derrière les fentes pour (a) $\lambda=3.25$ cm (b) $\lambda=1.17$ cm. (c) Déphasage de la figure d'interférence en fonction de la circulation comparé au déphasage théorique prédit par l'analogie à l'effet AB. Les incertitudes sont les erreurs sur la mesure de l'interfrange et de Δx .

Nous avons vu ci-dessus que l'interfrange de la figure d'interférence des fentes d'Young semblait correspondre à ce qu'on observe en optique. Afin de décaler la figure d'interférence un vortex a été ajouté derrière le vibreur. Pour éviter les différentes perturbations dues à la mise en rotation de l'agitateur, nous avons stabilisé un vortex avec une vitesse angulaire importante, puis la vitesse de l'agitateur a été diminuée graduellement.

Les observations sont présentées sur les figures 8(a) et (b), pour deux longueurs d'ondes d'excitation différentes, avec de haut en bas la circulation du vortex qui augmente. On peut voir que la figure se décale

vers la gauche à mesure que la circulation augmente. Quantitativement, nous avons mesuré le décalage du noeud central par rapport à son emplacement pour $\Gamma = 18 \text{ cm}^2/\text{s}$, que nous avons appelé Δx , pour chaque valeur de circulation. Le déphasage de la figure d'interférence est alors

$$\Delta\phi^{\text{Young}} = \frac{2\pi}{i_{\text{mes}}} \Delta x \quad (15)$$

où i_{mes} est l'interfrange, qui correspond à la longueur d'onde de la figure d'interférence.

Ce déphasage a été comparé au déphasage $\Delta\phi^{\text{th}} = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{\Gamma}{v_g}$ (12), prédit par l'effet Aharonov-Bohm. Le tracé de ces valeurs est présenté sur la figure 8(c). Les mesures correspondent à la prédiction, et on observe bien que pour $\Delta\phi^{\text{th}} = 2\pi$ les lobes se trouvent décalés d'une interfrange (figures 8(b)).

Conclusion et perspectives

Nous avons démontré que l'analogie entre l'effet Aharonov-Bohm et l'hydrodynamique est réalisable expérimentalement. Nous avons en effet mis en évidence l'apparition de dislocations de fronts d'onde sur les ondes de surface du fluide. Le nombre de fronts d'onde supplémentaires obéit bien au paramètre α comme prédit par la théorie. Nous avons également mis en place une expérience intuitive pour mettre en évidence l'apparition de la phase de Berry, un montage type fente d'Young. En effet, la présence de cette phase entraîne simplement un décalage de la figure d'interférence, ce qui a pu être mesuré et confronté avec succès à la prédiction théorique. Des améliorations concernant l'imagerie et la création du vortex restent cependant envisageables. Il est clair que nos images de dislocation de fronts d'onde pourraient être plus nettes, ce qui nous a empêché d'effectuer des mesures pour des fréquences d'ondes de surface élevées. Concernant le vortex, un agitateur plus performant faisant tourner le barreau aimanté sans accoups permettrait de diminuer la hauteur d'eau dans la cuve (car moins de perturbations de surface) et ainsi rendre le vortex plus stable. Cette stabilité permettrait de réduire les incertitudes et d'observer l'apparition de dislocations pour un paramètre α précisément égal à un demi-entier.

A Dispositif expérimental

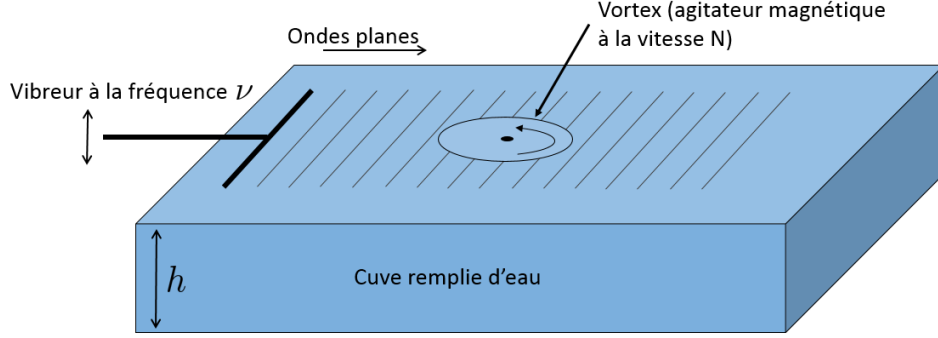


FIGURE 9: Dispositif expérimental : Une cuve est remplie d'eau (hauteur h), un vibreur fait se propager des ondes à la surface du fluide (fréquence ν) et un agitateur magnétique tournant à la vitesse N crée un vortex de circulation Γ .

Le but de l'expérience a été d'observer une analogie à l'effet Aharonov-Bohm. Pour cela le cahier des charges était le suivant :

- Disposer d'une cuve remplie de fluide dans laquelle des ondes (de longueur d'onde et de vitesse de groupe connues) se propagent, et où les effets de bords sont négligeables.
- Créer un vortex dans le fluide, duquel la circulation devra être connue (mesurée).

Pour répondre à cela, une cuve en verre a été choisie de dimensions 50x30x15cm. Ces dimensions permettront de faire varier la hauteur d'eau de manière importante, tout en disposant d'une fenêtre d'observation assez grande où les bords n'auront pas d'impact. Afin de créer les ondes, un vibreur alimenté par un générateur basses fréquences est utilisé. (En filmant le vibreur, il a été vérifié que la fréquence au bout du vibreur était bien la même que celle affichée sur le GBF.) Enfin, un agitateur magnétique est utilisé pour créer le tourbillon. Le choix d'un tourbillon de vidange (Berry et al. [1] et Cobelli et al. [2]) ayant été exclu pour des questions de simplicité.

Nous avons utilisé de l'eau (longueur capillaire $l_c = 2.7mm$) par souci de simplicité également, et divers éléments y seront ajoutés afin de modifier ses propriétés optiques.

De part le choix de l'agitateur magnétique, une hauteur d'eau $h \sim 10$ cm a été choisie pour éviter des effets dus aux mouvements du batonnet magnétique en surface (ondelettes, bulles...).

Afin de pouvoir observer les fronts d'onde, la longueur d'onde respectera $1\text{ cm} < \lambda < 10\text{ cm}$. Cela équivaut à $4\text{ Hz} < \nu < 27\text{ Hz}$, et à partir de la dérivée de la relation de dispersion : $18\text{ cm/s} < v_g < 34\text{ cm/s}$. On veillera donc à observer les fronts d'onde aux endroits où la vitesse tangentielle du vortex $U = v_\theta$ sera petite devant ces valeurs, cela pour respecter l'approximation qui permet d'écrire l'équation (11).

Pour les mesures, une caméra (utilisée entre 16 et 50 fps) et un objectif ont été utilisés.

B Méthodes d'observation

B.1 Observation de l'ombre de la surface

Cette méthode a été utilisée pour les mesures des parties 2.1 et 3. Le dispositif de mesure est présenté sur la figure 10.

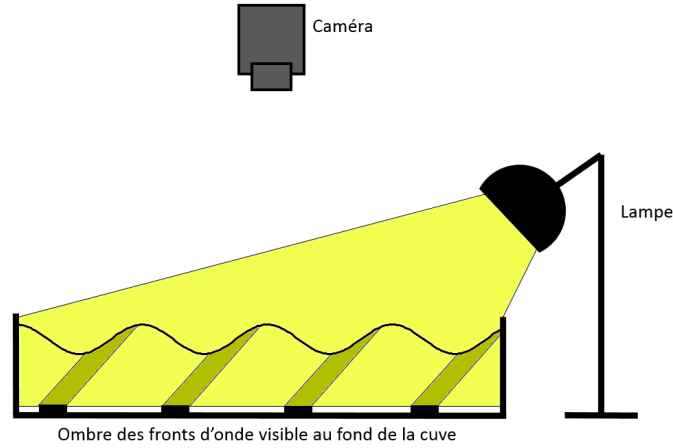


FIGURE 10: Schéma explicatif de la prise d'image. L'ombre des déformations de la surface est projetée sur le fond de la cuve. L'observation est faite avec une caméra située à la verticale de la cuve.

Relation de dispersion Pour chaque valeur de fréquence, une photo du fond de la cuve est prise, puis traitée comme présenté sur la figure 3(a). A partir de la photo à laquelle on a soustrait le fond lumineux, le profil d'intensité est tracé (figure 3(b)). Enfin la mesure de la distance entre plusieurs pics divisé par le nombre de pics donne la longueur d'onde pour une fréquence et une hauteur d'eau donnée.

Observation des dislocations du front d'onde Pour cette observation, un traitement particulier des images a été effectué. Pour chaque valeur de circulation Γ et de fréquence ν , un film d'une dizaine de seconde enregistré à $\frac{\nu}{2}$ fps a été réalisé. Cette valeur a été choisie afin de stroboscooper le film, puis de sommer toutes les images. Le fond lumineux est ensuite soustrait, puis le contraste est augmenté.

B.2 Reflexion d'une nappe laser

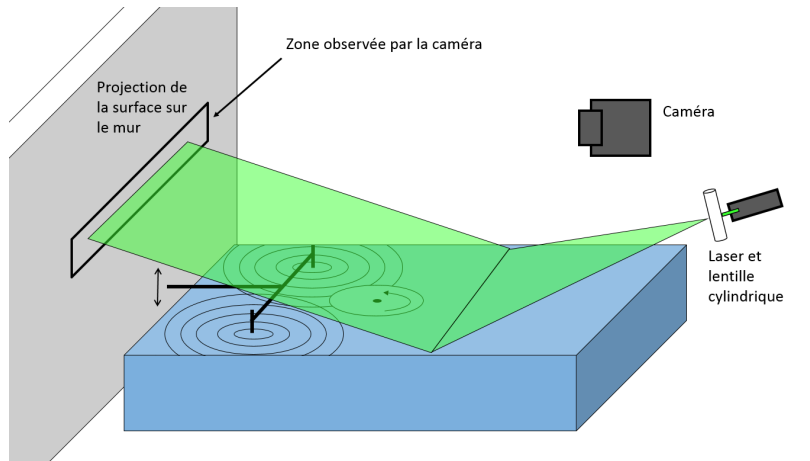


FIGURE 11: Schémas explicatif de la prise d'image. Observation de la figure d'interférence type "fentes d'Young" par reflexion d'une nappe laser sur la surface. La figure est observée sur le mur.

Cette technique a été utilisé pour les mesures des parties 4.1 et 4.2. L'installation est présentée sur la figure 11.

Lorsqu'on observe la figure d'interférence des fentes d'Young en optique, on place un écran perpendiculairement au faisceau laser. Pour observer le même type de phénomène avec les ondes de surfaces, il a fallu trouver un dispositif permettant d'observer l'amplitude des ondes sans les perturber. Pour cela, nous avons envoyé une nappe laser à une distance fixée des "fentes" qui, se réfléchissant sur la surface, projette la figure d'interférence sur le mur (perpendiculaire à la surface de l'eau).

Les images obtenues en filmant le mur sont ensuite sommées, puis le fond bruité est soustrait, et le contraste est augmenté.

B.3 Caractérisation du vortex en PIV

Pour caractériser le vortex, nous avons utilisé le principe de *Particle Image Velocimetry*. A l'eau a été ajoutée une petite portion de lait en poudre (type "Régilait") afin de la rendre opaque sans en altérer les propriétés. Cette opacité aura l'avantage de cacher le barreau magnétique au centre du vortex, afin de pouvoir mesurer les vitesses à cet endroit. Des grains de poivre moulus ont également été placés sur la surface afin de suivre le mouvement du fluide. Le module PIVlab [5] de Matlab a été utilisé pour traiter les images.

Une caméra est placée au dessus de la cuve, et le vortex est filmé à une fréquence de 30fps. Une série d'images comme présenté sur la figure 4(a) est obtenue. A partir de cette série d'image, le champ de vitesse de la surface est calculé grâce au module PIVlab [5]. Pour chaque paire d'image, un champ instantané est calculé (figure 4(b)), à partir duquel les traitements présentés dans la partie 2.2 ont été réalisés.

Références

- [1] M.V. Berry, R.G Chambers, M.D. Large, C. Upstill, and J.C. Walmsley. Wavefront dislocations in the ahronov-bohm effect and its water wave analogue. *Eur. J. Phys*, 1 :154–162, 1980.
- [2] P.J. Cobelli, A. Maurel, V. Pagneux, and P. Petitjeans. Global measurement of water waves by fourier transform profilometry. *Exp Fluids*, 46 :1037–1047, 2009.
- [3] Etienne Guyon, Jean-Pierre Hulin, and Luc Petit. *Hydrodynamique Physique*. EDP Science, 2012.
- [4] Ambrož Kregar. Aharonov-bohm effect, 2011. Univerza v Ljubljana.
- [5] William Thielicke and Eize J. Stamhuis. Pivlab - time-resolved digital particle image velocimetry tool for matlab, 2014.